

軌跡・領域の攻略

年 _____ 組 _____ 番 氏名 _____

1 tが実数全体を動くとき、 $y = 2tx - t^2$ の通過する領域を求めよ。

【解法1 実数解条件に帰着】

直線 $y = 2tx - t^2$ 上の点 (x, Y) とする。

$$Y = 2tx - t^2$$

$$\therefore t^2 - 2xt - Y = 0$$

tが実数なので、判別式を $D \geq 0$ とする。

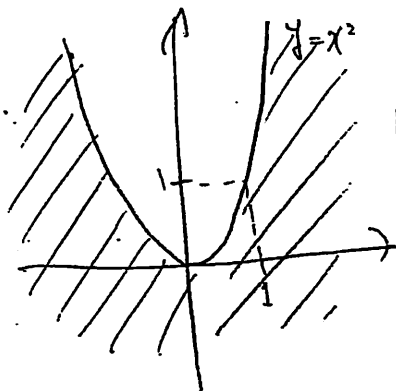
$$\frac{D}{4} \geq 0 \text{ より}$$

$$x^2 - Y \geq 0$$

$$\therefore Y \leq x^2$$

直線上の点 (x, Y) は $Y \leq x^2$ を満たすから、

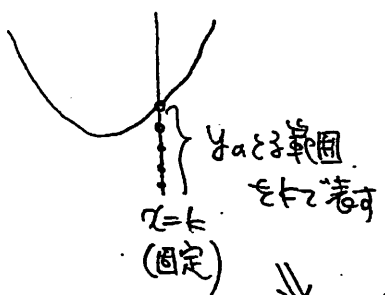
求める領域は $y \leq x^2$ 。



図の斜線部分
境界含む。

【解法2 2変数関数の発想 (ファクシミリの原理)】

$x \in$ 固定したとき、 y のとりうる範囲を定める



$x = k$ と固定する。

$$y = 2tk - t^2 = -(t-k)^2 + k^2$$

$$\text{より } y \leq k^2$$

↓ k を消せば
1. y の式がでる。
2. k が軌跡。

$y = 2tx - t^2$ と $x = k$ との共有点 $(k, 2tk - t^2)$ を考えれば、

y 座標は $y \leq k^2$ となり、

$y \leq x^2$ となる。

【解法3 包絡線の発想】

放物線に「接してゆく」という事実を使う!

$$y = 2tx - t^2 \text{ より}$$

$$t^2 - 2xt + y = 0$$

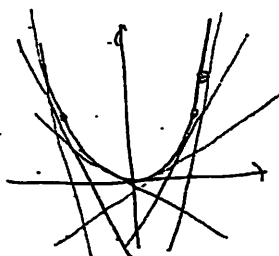
$$\therefore (t-x)^2 - x^2 + y = 0$$

これは、 $-x^2 + y = 0$ と連立する。

$$\begin{cases} (t-x)^2 - x^2 + y = 0 \dots \textcircled{1} \\ -x^2 + y = 0 \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

すると、 $(t-x)^2 = 0$ より、 $x = t$ (重解)

つまり直線①と放物線②は $x = t$ で接する。



tがすべての実数を動くとき

①は②に接してゆく動

左図のようになり、求める

$$y \leq x^2$$

3通りの解法を完全理解せよ

2 直線 $y = 2ax + a^2$ について、 a がすべての実数値をとって変化するとき、この直線が通りうる領域を図示せよ。

【解法1 実数解条件に帰着】

$y = 2ax + a^2$ 上の点 (x, y) とする。

$$y = 2ax + a^2$$

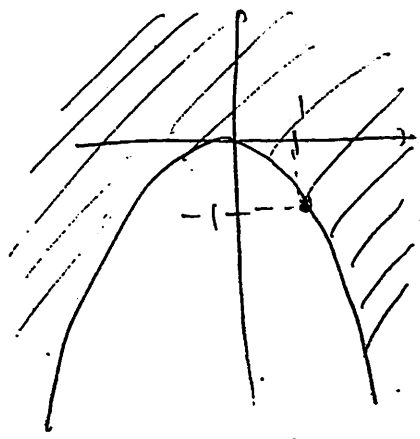
$$\therefore a^2 + 2xa - y = 0$$

a は実数 $\Rightarrow a^2$ 判別式 ≥ 0

$$x^2 + y \geq 0$$

$$\therefore y \geq -x^2$$

よって求める領域は $y \geq -x^2$



図の斜線部分
境界含む

【解法2 2変数関数の発想 (ファクシミリ原理)】

$x = k$ と固定する。

$$y = 2ak + a^2$$

$$= (a+k)^2 - k^2$$

$$\therefore y \geq -k^2$$

$y = 2ax + a^2$ と $x = k$ との共有点

$$(k, 2ka + a^2) \text{ を考えよ}$$

y 座標は $y \geq -k^2$ となる

$$y \geq -x^2$$

【解法3 包絡線の発想】

$$y = 2ax + a^2 \quad (*)$$

$$a^2 + 2ax - y = 0$$

$$(a+x)^2 - x^2 - y = 0$$

$$\therefore y \geq -x^2$$

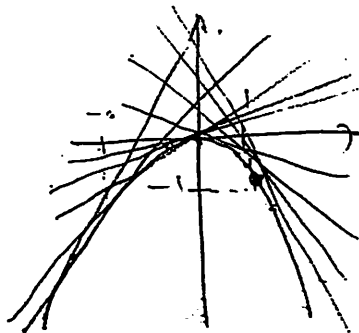
$$\therefore y = -x^2 \text{ を連立する}$$

$$(a+x)^2 - x^2 - y = 0 \quad \dots ①$$

$$y = -x^2 \quad \dots ②$$

すなわち $(a+x)^2 = 0$, $x = -a$ (重解)

となり、①と②は $x = -a$ だけ (2重)



よって左図のように

求める領域は

$$y \geq -x^2$$

3) t が $t \geq 1$ なる範囲を動くとき、直線 $y = tx - \frac{1}{2}t^2$ の通過する領域を求めよ。

【解法1 実数解条件に帰着】

$$y = tx - \frac{1}{2}t^2 \text{ 上の } \exists t \in (X, Y) \text{ なる } t$$

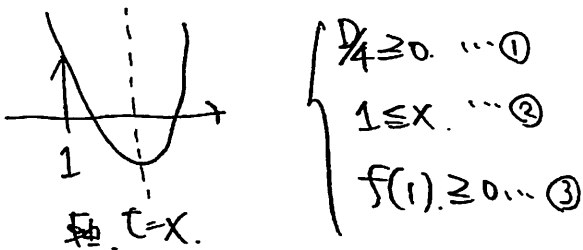
$$Y = tX - \frac{1}{2}t^2$$

$$t^2 - 2tX + 2Y = 0 \dots \ast$$

これが $t \geq 1$ を満たす解をもつた X, Y の条件を調べたい。

$$f(t) = t^2 - 2tX + 2Y \text{ とおく}$$

i) \ast が 1 以上の 2 つの実数解をもつとき

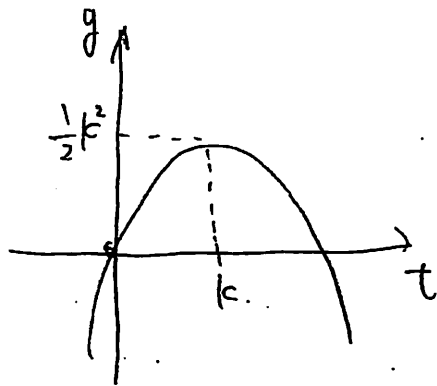


【解法2 2変数関数の発想 (ファクシミリ原理)】

$x = k$ と固定する。

$$y = tk - \frac{1}{2}t^2$$

$$= -\frac{1}{2}(t-k)^2 + \frac{1}{2}k^2$$



① より $x^2 - 2Y \geq 0$

$$Y \leq \frac{1}{2}x^2$$

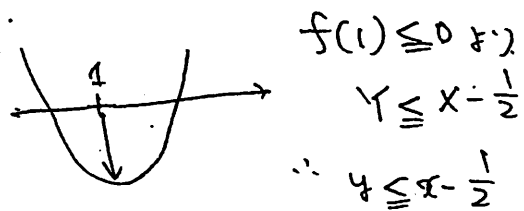
③ より

$$1 - 2X + 2Y \geq 0$$

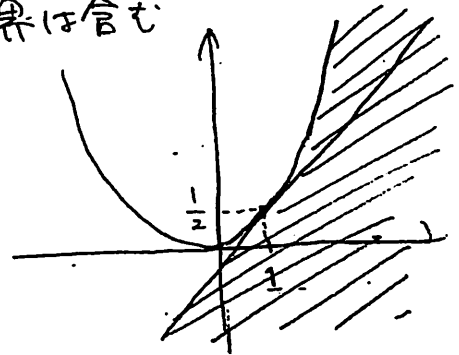
$$Y \geq X - \frac{1}{2}$$

$$\text{よって } \begin{cases} Y \leq \frac{1}{2}x^2 \\ 1 \leq x \\ Y \geq x - \frac{1}{2} \end{cases}$$

ii) \ast が 1 以上の解と 1 より小さい解をもつとき



よって、求める領域は図の斜線部分、境界は含む



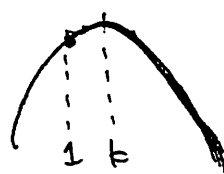
i) $k < 1$ のとき



$$y \leq y(1) = k - \frac{1}{2}$$

より、 $x < 1$ のときは $y \leq x - \frac{1}{2}$

ii) $1 \leq k$ のとき



$$y \leq y(k) = \frac{1}{2}k^2$$

より、 $1 \leq x$ のときは $y \leq \frac{1}{2}x^2$

よって ...

【解法3 包絡線の発想】

$$y = tx - \frac{1}{2}t^2 \quad (*)$$

$$t^2 - 2tx - 2y = 0.$$

$$(t-x)^2 - x^2 - 2y = 0.$$

よって $-x^2 - 2y = 0$ が必要

$$y = \frac{1}{2}x^2 \quad \text{包絡線}$$

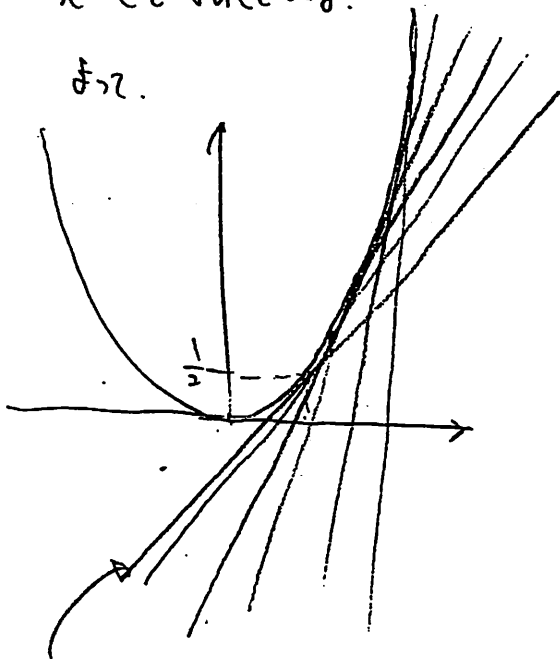
$$\begin{cases} (t-x)^2 - x^2 - 2y = 0 & \dots ① \\ y = \frac{1}{2}x^2 & \dots ② \end{cases}$$

よって $(t-x)^2 = 0$ のとき $x=t$ の重解を

とすると直線①と放物線②は

$x=t$ で接している。

よって



$t=1$ のとき $y = x - \frac{1}{2}$

よって ...

4 t が $0 < t < 2$ の範囲を動くとき、 xy 平面上で、点 $(0, t^2 + 4)$ と点 $(\frac{t}{2} + \frac{2}{t}, 0)$ を結ぶ線分が通過する領域を図示せよ。

この2点を通る直線の方程式は、

$$\begin{aligned} \text{傾き} &= \frac{t^2 + 4}{-\frac{t}{2} - \frac{2}{t}} \\ &= -2t. \end{aligned}$$

したがって

$$y = -2tx + t^2 + 4 \quad \text{と} \quad \text{なる}$$

線分の通過領域
 \Rightarrow 包絡線に考えるのが自然

$$t^2 - 2x \cdot t + 4 - y = 0$$

$$(t-x)^2 - x^2 + 4 - y = 0.$$

この式と $-x^2 + 4 - y = 0$ を連立させる。

すなわち

$$\begin{cases} (t-x)^2 - x^2 + 4 - y = 0 \quad \dots \textcircled{1} \\ y = -x^2 + 4 \quad \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

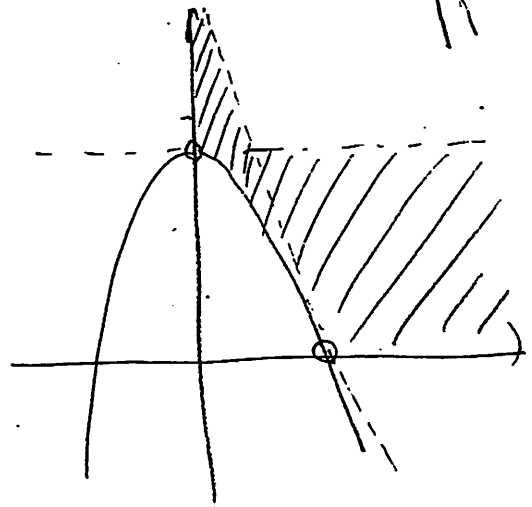
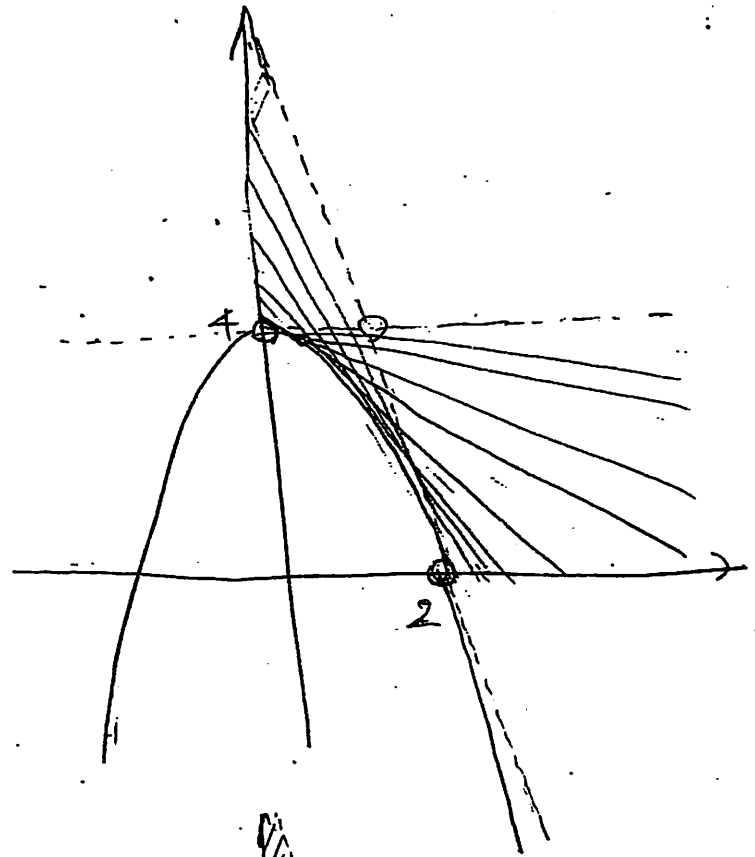
を考えると、 $(t-x)^2 = 0$ かつ

②の放物線と①の直線が、
 $x=t$ で接する。

すなわち、②は直線群①の

包絡線である。

線分は、 x 切片と y 切片を結ぶ
 したがって、 $0 < t < 2$ かつ



図の斜線部分

境界は、白丸と点線部分の
 合計である。

5 x についての2次方程式 $x^2 - 2ax + b = 0$ (a, b は実定数) を考える。

(1) 実数解をもつための条件を求め、 ab 平面上に図示せよ。

(2) $-1 \leq x \leq 2$ に2つの相異なる解をもつための a, b についての条件を求め、 ab 平面上に図示せよ。

(1) $a^2 - b \geq 0$

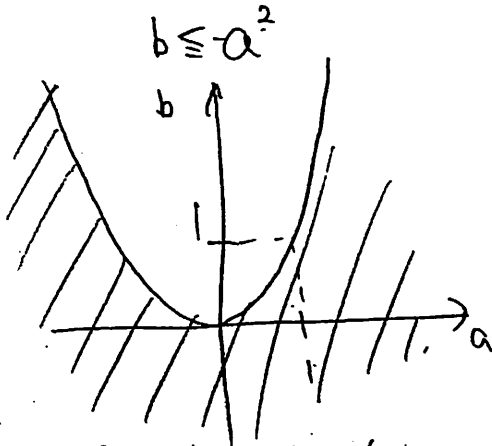
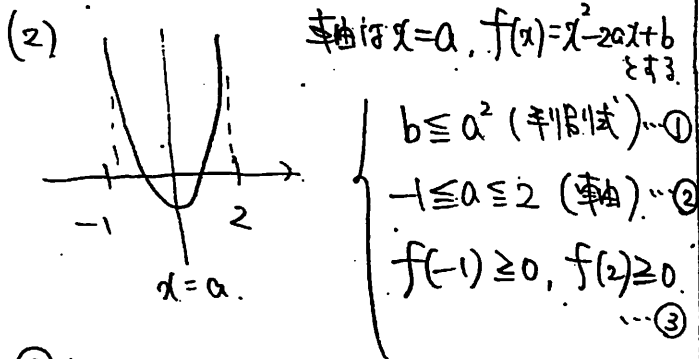


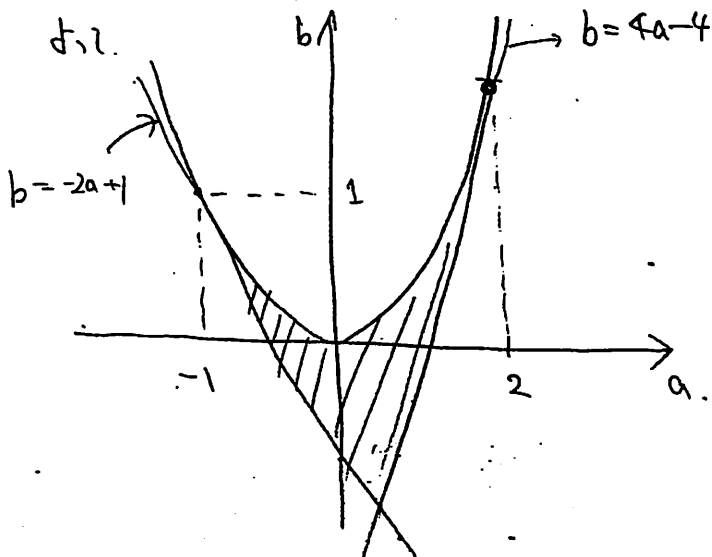
図9 斜線部が境界合



③より

$-1 + 2a + b \geq 0$ より
 $b \geq -2a + 1$

$4 - 4a + b \geq 0$ より
 $b \geq 4a - 4$



判別式とみれば

$b = 2x \cdot a - x^2$ とみる

ab 平面上では $x^2 - 2ax + b = 0$ は直線とみれば

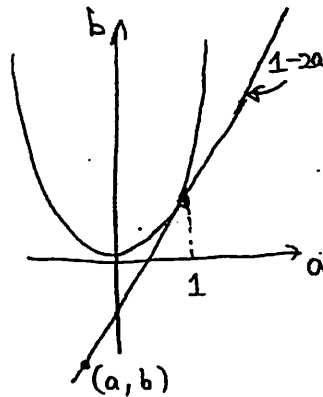
$(x-a)^2 - a^2 + b = 0$

より $-a^2 + b = 0$ と連立させる。すなわち

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (-a^2 + b) = 0 & \dots ① \\ \dots & \dots b = a^2 & \dots ② \end{cases}$$

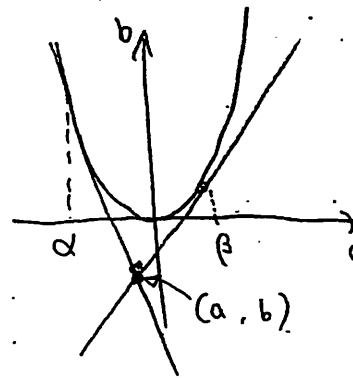
と考えると $(x-a)^2 = 0$ より直線①と放物線②は $a = x_1$ において接している。

例として $x^2 - 2ax + b = 0$ に $x=1$ という解をもつとする。すると①は $1 - 2a + b = 0$ になる。これは②に $a=1$ と接している。(上の話より)



逆にこの直線上 $a(a, b)$ から接線とみれば $a=1$ とき接し、このとき方程式の解は $x=1$ となる。

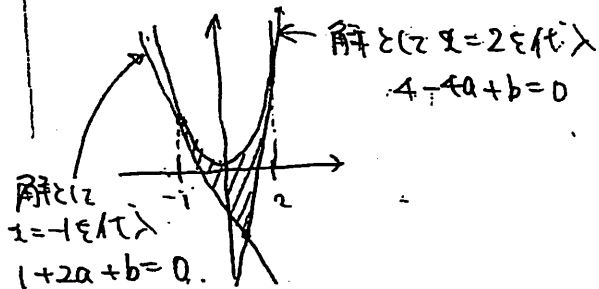
つまり方程式の解 α, β とおくと、下の図のように接点となり、解が現れる。



①は接線とみれば (a, b) の範囲

②は $-1 \leq a \leq 2$ に2本接線とみれば (a, b) の範囲

を求めれば $f(x)$ の接線は $x=-1, 2$ を代入すれば $b = -2a + 1$ と $b = 4a - 4$ となる。



6 実数 t に対して, xy 平面上の直線 $(1-t^2)x - 2ty = 1+t^2$ は t の値によらずある円 C に接しているものとする. t が $t \geq 1$ の範囲を動くとき, 直線の通過する領域を図示せよ.

t^2 の係数が正

$$(1-t^2)x - 2ty = 1+t^2$$

$$x - t^2x - 2ty = 1+t^2$$

$$(1+x)t^2 + 2y \cdot t - x + 1 = 0 \dots \textcircled{A}$$

i) $1+x=0$ のとき

$$x = -1$$

$$2yt + 2 = 0$$

$y=0$ とすると, この式が成り立たないから

$$y \neq 0$$

$$t = -\frac{1}{y}$$

$$t \geq 1$$

$$-\frac{1}{y} \geq 1$$

$y > 0$ のとき, この不等式は成り立たない

$y < 0$ のとき

$$-1 \leq y$$

$$\therefore -1 \leq y < 0$$

ii) $1+x \neq 0$ のとき

① $x > -1$ のとき, 実数解を少なくと
1つ以上とるには

$$\frac{D}{4} \geq 0$$

$$y^2 - (1+x)(-x+1) \geq 0$$

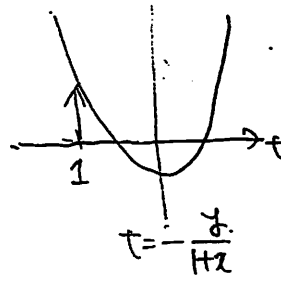
$$x^2 + y^2 \geq 1$$

② $x < -1$ のとき, $f(t)$ を考える

$y = f(t)$ のグラフの軸は

$$t = -\frac{y}{1+x}$$

[1] $x > -1$ のとき, $t \geq 1$ で解を2つとるとき



$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 & \dots \textcircled{1} \\ 1 \leq -\frac{y}{1+x} & \dots \textcircled{2} \\ f(1) \geq 0 & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

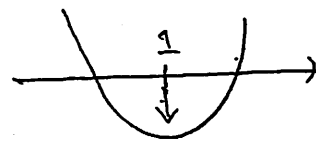
② のとき $1+x \leq -y$

$$y \leq -x-1$$

③ のとき $(1+x) + 2y - x + 1 \geq 0$

$$y \geq -1$$

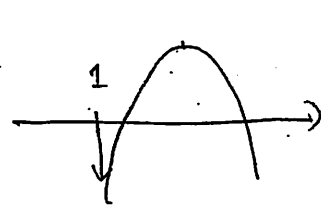
[2] $x > -1$ のとき, $t \geq 1$ で解を1つとるとき



$$f(1) \leq 0$$

$$y \leq -1$$

[3] $x < -1$ のとき, $t \geq 1$ で解を2つとるとき



$$x^2 + y^2 \geq 1$$

$$1 \leq -\frac{y}{1+x} \dots \textcircled{2}'$$

$$f(1) \leq 0 \dots \textcircled{3}'$$

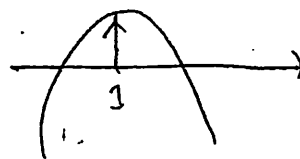
②' のとき $1+x \geq -y$

$$y \geq -x-1$$

$1+x < 0$ に注意

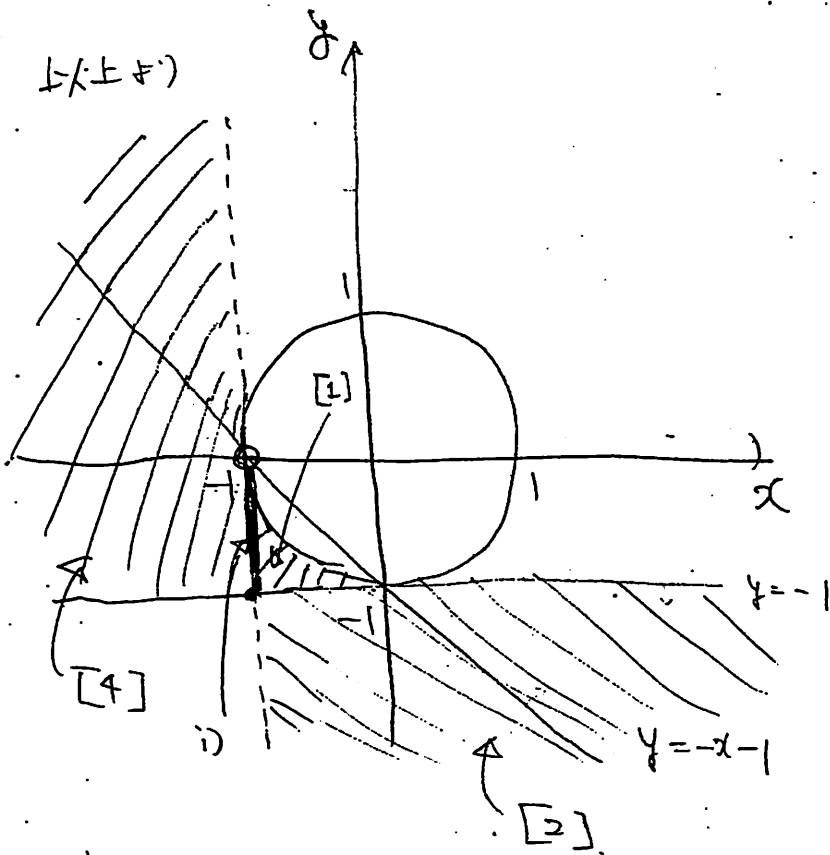
③' のとき $y \leq -1$

[4] $x < -1$ のとき, $t \geq 1$ で解を1つとるとき



$$f(1) \geq 0$$

$$y \geq -1$$



* [3] は円

②の斜線部分、境界含たが、①は含たが、

包絡線

$$(1+x)t^2 + 2y \cdot t - x + 1 = 0$$

i) $x \neq -1$ のとき

$$(1+x) \left(t + \frac{2y}{1+x} \cdot t \right) - x + 1 = 0$$

$$(1+x) \left\{ \left(t + \frac{y}{1+x} \right)^2 - \left(\frac{y}{1+x} \right)^2 \right\} - x + 1 = 0$$

$$(1+x) \left(t + \frac{y}{1+x} \right)^2 - \frac{y^2}{1+x} - x + 1 = 0$$

$$\begin{cases} (1+x) \left(t + \frac{y}{1+x} \right)^2 - \frac{y^2}{1+x} - x + 1 = 0 \dots \textcircled{1} \\ -\frac{y^2}{1+x} - x + 1 = 0 \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

よ、 $t = -\frac{y}{1+x}$ のとき成り立つ。

よ、②は変形すると、 $x^2 + y^2 = 1$ となる。

$$t \geq |y|$$

$$-\frac{y}{1+x} \geq 1$$

$x < -1$ のとき接点存在 (ただし $x > -1$)

$$t = -\frac{y}{1+x}$$

$$y \leq -x - 1$$

ii) $x = -1$ のとき

$$2yt + 2 = 0$$

$$t = -\frac{1}{y} \quad (t \neq 0 \text{ (} y \neq 0 \text{)})$$

$$t \geq |y|$$

$$-\frac{1}{y} \geq 1$$

$$-y \geq y^2$$

$$0 \geq y(y+1) \quad \text{よ、} -1 \leq y < 0$$

