

ライプニッツ級数・メルカトル級数

【例題】 $a = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$, $a_n = \int_0^1 \frac{1 - (-x)^n}{1+x} dx$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)とする.

(1) a を求めよ.

(2) $a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)となることを示せ.

(3) $|a_n - a| \leq \int_0^1 x^n dx$ が成り立つことを示せ.

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ が成り立つことを示せ.

(愛知工業大)

【解答】

(1) $a = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$
 $= [\log|1+x|]_0^1$
 $= \log 2$

(2) $a_n = \int_0^1 \frac{1 - (-x)^n}{1+x} dx$
 $= \int_0^1 \frac{1 - (-x)^n}{1 - (-x)} dx$
 $= \int_0^1 \{1 + (-x) + (-x)^2 + \dots + (-x)^{n-1}\} dx$
 $= \left[x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots - (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}x^n \right]_0^1$
 $= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$

(3) $|a_n - a| = \left| \int_0^1 \left\{ \frac{1 - (-x)^n}{1+x} - \frac{1}{1+x} \right\} dx \right|$
 $= \left| \int_0^1 \left\{ \frac{-(-x)^n}{1+x} \right\} dx \right|$
 $\leq \int_0^1 \left| \frac{-(-x)^n}{1+x} \right| dx$
 $= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$
 $\leq \int_0^1 x^n dx$

(分母は1より大きいから)

(4) $0 \leq |a_n - a| \leq \int_0^1 x^n dx$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$

より、はさみうちの原理から

$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a| = 0$
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

※この問題から、

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right\} = \log 2$

が示されたことになる。{ } 内の級数をメルカトル級数といい、 $n \rightarrow \infty$ のとき、 $\log 2$ に収束する。いろいろな出題のされ方をするので、注意すること。

【1】 x を実数、 n を自然数とする。次の問いに答えよ。

(1) $1 - x^2 + x^4 - x^6 \dots + (-1)^{n-1} x^{2n-2}$ の和を求めよ。

(2) $S_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$ とする。このとき、等式

$S_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx - (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx$

が成り立つことを示せ。

(3) 定積分 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ を求めよ。

(4) 次の不等式を示せ。

$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx \leq \frac{1}{2n+1}$

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。

(静岡大)

例題と同様にできるので、要点と答えのみとする。

(1) $\frac{1 - (-1)^n x^{2n}}{1+x^2}$

(2) 積分を一つにまとめて(1)を使う。

(3) $x = \tan \theta$ と置換すればよい。答えは $\frac{\pi}{4}$

(4) $0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx \leq \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{1}{2n+1}$

(5) 今までの結果と、はさみうちの原理を使えばよい。

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\pi}{4}$

※この問題から,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \right\} = \frac{\pi}{4}$$

が示されたことになる. $\{ \}$ 内の級数をライプニッツ級数といい, $n \rightarrow \infty$ のとき, $\frac{\pi}{4}$ に収束する. メルカトル級数とセットにしてマスターするとよい. 以上を踏まえると, 次の有名問題の見通しを容易に立てることができるだろう.

【2】 自然数 n に対して,

$$R_n(x) = \frac{1}{1+x} - \{1 - x + x^2 - \dots - (-1)^n x^n\}$$

とする.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 R_n(x^2) dx$ を求めよ.

(2) 無限級数 $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots$ の和

(札幌医大)

$$\begin{aligned} (1) R_n(x^2) &= \frac{1}{1+x^2} - \{1 - x^2 + x^4 \dots + (-1)^n x^{2n}\} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1 - (-x^2)^{n+1}}{1 - (-x^2)} \\ &= \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1 - x^2} \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 R_n(x^2) dx \right| &\leq \int_0^1 |R_n(x^2)| dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx \\ &< \int_0^1 x^{2n+2} dx \end{aligned}$$

(なぜなら $\frac{x^{2n+2}}{1+x^2} < x^{2n+2}$ で, 等号は $x=0$ のみ)

また, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^{2n+2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+3} = 0$ より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 R_n(x^2) dx = 0$$

(2) $\int_0^1 R_n(x^2) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$

$$- \int_0^1 \{1 - x^2 + x^4 \dots + (-1)^n x^{2n}\} dx \dots \ast$$

ここで, $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$ である.

(計算略, $x = \tan \theta$ と置換積分して計算) また,

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \{1 - x^2 + x^4 \dots + (-1)^n x^{2n}\} dx \\ &= \left[x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 - \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

※式で $n \rightarrow \infty$ とすると, 今までの結果より

$$0 = \frac{\pi}{4} - \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} \right\}$$

よって, 求める和は $\frac{\pi}{4}$

※また, 次のようにタンジェントの漸化式として扱われることもある. しっかりこちらも練習しておこう.

【3】 自然数 n に対して, $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x dx$

とおく. 次の問いに答えよ.

(1) a_1 を求めよ.

(2) a_{n+1} を a_n を用いて表せ.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$ を求めよ.

(北海道大)

$$\begin{aligned} (1) a_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx \\ &= [\tan x - x]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 1 - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) a_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{2(n+1)} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \cdot (\tan x)^{2n} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \cdot (\tan x)^{2n} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \tan^{2n} x dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^2 x)^n dx \\ &= \left[\frac{1}{2n+1} \tan^{2n+1} x dx \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{2n} dx \\ &= \frac{1}{2n+1} - a_n \end{aligned}$$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + a_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = 0$

$0 < x < \frac{\pi}{4}$ において, $\tan x > 0$ より $(\tan x)^{2n} > 0$

よって $a_n > 0, a_{n+1} > 0$ なので

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = 0 \\ \text{よって } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4) \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \\
&= 1 - (a_2 + a_1) + (a_3 + a_2) - \\
&\quad \cdots (-1)^{n+1}(a_n + a_{n-1}) \\
&= 1 - a_1 + (-1)^{n+1}a_n
\end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = 1 - a$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

(ライプニッツ級数)