

ライプニッツ級数・メルカトル級数

【例題】 $a = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$, $a_n = \int_0^1 \frac{1 - (-x)^n}{1+x} dx$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)とする.

(1) a を求めよ.

(2) $a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)となることを示せ.

(3) $|a_n - a| \leq \int_0^1 x^n dx$ が成り立つことを示せ.

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ が成り立つことを示せ.

(愛知工業大)

【1】 x を実数, n を自然数とする. 次の問いに答えよ.

(1) $1 - x^2 + x^4 - x^6 \dots + (-1)^{n-1} x^{2n-2}$ の和を求めよ.

(2) $S_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$ とする. このとき, 等式

$$S_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx - (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx$$

が成り立つことを示せ.

(3) 定積分 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ を求めよ.

(4) 次の不等式を示せ.

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx \leq \frac{1}{2n+1}$$

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ.

(静岡大)

【2】 自然数 n に対して,

$$R_n(x) = \frac{1}{1+x} - \{1 - x + x^2 - \dots - (-1)^n x^n\}$$

とする.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 R_n(x^2) dx$ を求めよ.

(2) 無限級数 $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots$ の和

(札幌医大)

【3】 自然数 n に対して, $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x dx$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1) a_1 を求めよ.

(2) a_{n+1} を a_n を用いて表せ.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$ を求めよ.

(北海道大)