

パップス・ギュルダンの定理

【例題】

(1) 関数 $f(x)$ と $g(x)$ が次の2条件を満足しているとする.

(i) 区間 $[a, b]$ で $f(x) \geq g(x) \geq 0$

(ii) $[a, b]$ 上で $y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフは直線 $y = R$ (R は定数)に関して対称.

このとき, 2曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$, および, 2直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた図形の面積を S , この図形を x 軸のまわりに1回転させた立体の体積を V とするとき, 定積分を用いて

$$V = 2\pi RS$$

が成り立つことを証明せよ.

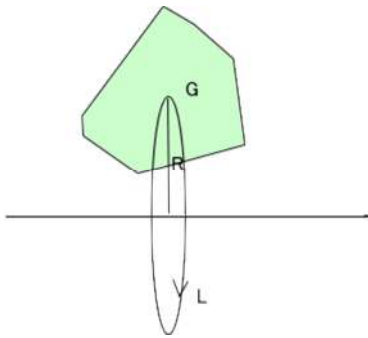
(2) 1辺の長さ a の正12角形をその1つの辺のまわりに1回転させた立体の体積を求めよ.

(宮城教育大)

この問題の背景は, パップス・ギュルダンの定理とよばれる, 次の定理である.

$$\text{(回転体の体積)} = \text{(重心の移動距離)} \times \text{(面積)}$$

$$V = 2\pi R \times S$$



例えば, $(0, 2)$ を中心とした半径1の円を x 軸のまわりに1回転させたドーナツ型の立体の体積は, 断面積 $S = \pi$, 重心(中心)の移動距離 4π なので, 体積は $V = 4\pi^2$ である.

この証明をしようとするとき, 重心の取り扱いについて大学レベルの知識が必要になってしまう. しかし, $y = R$ に関して対称な図形の回転体のときであれば, 高校レベルで証明できる.

さて, この問題の, 「 $y = R$ に関して対称」という条件をどのように数式に表現し, 処理するか? これは,

$$\frac{f(x) + g(x)}{2} = R$$

を満たすとして処理するとよい.

【解答】

(1) $f(x) + g(x) = 2R$, また, (i)より,

$$S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx$$

よって,

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b \pi \{f(x)\}^2 dx - \int_a^b \pi \{g(x)\}^2 dx \\ &= \pi \int_a^b \{f(x) + g(x)\} \{f(x) - g(x)\} dx \\ &= 2\pi R \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx \\ &= 2\pi RS \end{aligned}$$

(2) (略解)

正12角形の中心から x 軸までの距離を R とする. 計算をすると, 正12角形の面積 S は $6aR$, また,

$$R^2 = \frac{7 + 4\sqrt{3}}{4} a^2$$

が成り立つ. よって(1)から,

$$V = 2\pi RS = 12\pi aR^2 = 3(7 + 4\sqrt{3})\pi a^2$$

【1】 $a > 5$ とする. 円 $C: x^2 + (y - a)^2 = 25$ を x 軸の周りに1回転してできる回転体の体積は, 円 C を y 軸の周りに1回転してできる回転体の体積の5倍に一致している. このとき, a の値を求めよ.

(小樽商科大)

【解答】

x 軸の周りに1回転してできる回転体の体積を V_1 , y 軸の周りに1回転してできる回転体の体積を V_2 とする. 円 C の $y \geq a$ の部分を表す関数を $y = f(x)$, $y \leq a$ の部分を表す関数を $y = g(x)$ とすると

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_{-5}^5 \pi \{f(x)\}^2 dx - \int_{-5}^5 \pi \{g(x)\}^2 dx \\ &= \pi \int_{-5}^5 \{f(x) + g(x)\} \{f(x) - g(x)\} dx \end{aligned}$$

$f(x) + g(x) = 2a$ より

$$V_1 = 2\pi a \int_{-5}^5 \{f(x) - g(x)\} dx$$

$\int_{-5}^5 (f(x) - g(x)) dx$ は半径 5 の円の面積を表すから、

$$\begin{aligned} V_1 &= 2\pi a \cdot \pi \cdot 5^2 \\ &= 2 \cdot 5^2 \cdot a\pi^2 \end{aligned}$$

V_2 は半径 5 の球になるので

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3$$

よって

$V_1 = 5V_2$ より

$$2 \cdot 5^2 \cdot a\pi^2 = 5 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3$$

よって

$$a = \frac{50}{3\pi}$$