

パップス・ギュルダンの定理

【例題】

(1) 関数 $f(x)$ と $g(x)$ が次の2条件を満足しているとする.

(i) 区間 $[a, b]$ で $f(x) \geq g(x) \geq 0$

(ii) $[a, b]$ 上で $y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフは直線 $y = R$ (R は定数)に関して対称.

このとき, 2曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$, および, 2直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた図形の面積を S , この図形を x 軸のまわりに1回転させた立体の体積を V とするとき, 定積分を用いて

$$V = 2\pi RS$$

が成り立つことを証明せよ.

(2) 1辺の長さ a の正12角形をその1つの辺のまわりに1回転させた立体の体積を求めよ.

(宮城教育大)

【1】 $a > 5$ とする. 円 $C: x^2 + (y - a)^2 = 25$ を x 軸の周りに1回転してできる回転体の体積は, 円 C を y 軸の周りに1回転してできる回転体の体積の5倍に一致している. このとき, a の値を求めよ.

(小樽商科大)