

確率漸化式

【例題】

袋の中に赤球 4 個と白球 6 個が入っている。3 個を同時に袋から取り出し、取り出された赤球の個数を記録してから袋に戻す。この試行を n 回繰り返したとき、記録された赤球の個数の合計が奇数である確率を p_n とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) p_1 を求めよ。
- (2) p_{n+1} を p_n で表せ。
- (3) p_n を求めよ。

(新潟大)

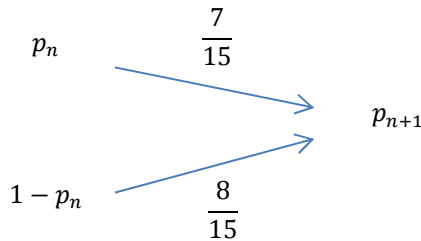
推移を表す図が描けるように！それが出来さえすれば、完答はたやすい。なお、漸化式を解く部分の解答は省略する。

【解答】

- (1) 赤 1 個白 2 個か、赤 3 個の場合なので、

$$\frac{{}_4C_1 \cdot {}_6C_2}{{}_{10}C_3} + \frac{{}_4C_3}{{}_{10}C_3} = \dots = \frac{8}{15}$$

- (2) 1 回投げたとき、合計が偶数である確率は $\frac{7}{15}$ である。 $n+1$ 回目に奇数回になる確率は、 n 回目までの合計が奇数で、その後偶数個がでるか、 n 回目までの合計が偶数で、その後奇数個がでるかのどちらかである。



したがって、

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{7}{15}p_n + \frac{8}{15}(1-p_n) \\ &= -\frac{1}{15}p_n + \frac{8}{15} \end{aligned}$$

- (3) (計算方法は教科書などで、後は解くだけ。)

$$\begin{aligned} p_n &= \left(-\frac{1}{15}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{30} + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{15}\right)^n + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

※ $n \rightarrow \infty$ のときに、 $\frac{1}{2}$ に収束する。確かに無限回やれば、偶数回も奇数回も同等になって、そうなるかもなあ…ぐらいの感覚は持ってほしい。

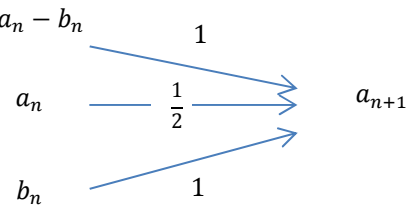
【1】ある 1 面だけに印のついた立方体が水平な平面に置かれている。平面に接する面 (底面) の 4 辺のうち 1 辺を選んでこの辺を軸にしてこの立方体を横に倒す、という操作を行う。ただし、どの辺が選ばれるかは同様に確からしいとし、印のついた面が最初は上面にあるとする。この操作を n 回続けて行ったとき、印のついた面が立方体の側面にくる確率を a_n 、底面にくる確率を b_n とおく。

- (1) a_2 を求めよ。
- (2) a_{n+1} と a_n の関係式を導け。
- (3) b_n を n の式で表し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ。

(東北大)

【解答】

- (1) 1 回倒すとどう転がしても印は側面に移る。その後、上面に戻ればよいので、答え $\frac{1}{2}$ 。
- (2) n 回目に上面に印がある確率は、 $1 - a_n - b_n$ このときは必ず $n+1$ 回目に印が側面にくる。 n 回目に側面に印がある確率は a_n で、その後は $\frac{1}{2}$ の確率で、 $n+1$ 回目に印が上面にくる。 n 回目に底面に印がある確率は b_n で、 $n+1$ 回目に印が必ず側面にくる。



したがって、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (1 - a_n - b_n) + \frac{1}{2}a_n + b_n \\ &= -\frac{1}{2}a_n + 1 \end{aligned}$$

- (3) $a_1 = 1$ を使い、(2) の漸化式を解くと、(計算略)

$$a_n = \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}$$

また、 $b_n = \frac{1}{4} a_{n-1}$ を使って計算すると、(計算略)

$$b_n = \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{6}$$

よって、

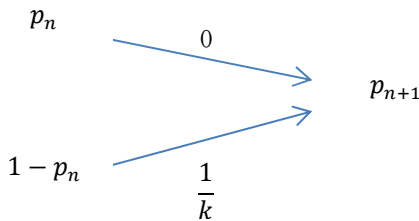
$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{6}$$

※これもよく考えれば、無限回転がせば最初の位置はどうでもよくなり、すべての面が対等になるので、 $\frac{1}{6}$ になることは予想できる。

【2】 $k+1$ 個($k \geq 1$)の部屋 $A_0, A_1, A_2, \dots, A_k$ がある。千葉君はある部屋から、その部屋以外の部屋を等しい確率 $\frac{1}{k}$ で1つ選び、そこへ移動する。最初、部屋 A_0 にいた千葉君が、 n 回($n \geq 1$)部屋を移動した後に部屋 A_1 にいる確率を求めよ。
(千葉大)

【解答】

n 回部屋を移動した後に部屋 A_1 にいる確率を p_n とする。今までの問題と同様に推移図をかくと、



よって、

$$p_{n+1} = \frac{1}{k}(1-p_n)$$

また、 $p_1 = \frac{1}{k}$ であり、これを解くと、(計算略)

$$p_n = \frac{-1}{k+1} \left(-\frac{1}{k}\right)^n + \frac{1}{k+1}$$

【解説】

確率漸化式の解き方は、実は、大きく分けて2通りある。

- ① n 回目と $n+1$ 回目の状況から p_{n+1} と p_n の漸化式を作る。
- ② 1回目、2回目の状況で場合分けをして、 p_{n+1} と p_n の漸化式を作る。

この問題で②の解き方をやってみよう。

【解答②】

n ($n \geq 2$)回部屋を移動した後に部屋 A_1 にいる場合は次の2通りに分類できる。

1) 1回目に A_1 に移動する場合

$A_0 \Rightarrow A_1 \Rightarrow$ (2回目はどこでもよい。

その後残り $n-2$ 回で最後は A_1)

この確率は、

$$\frac{1}{k} \cdot 1 \cdot p_{n-2}$$

2) 1回目に A_1 以外のところに移動する場合

$A_0 \Rightarrow A_1$ 以外のところ \Rightarrow (残り $n-1$ 回で最後は A_1)

この確率は、

$$\frac{k-1}{k} \cdot p_{n-1}$$

以上より、

$$p_n = \frac{k-1}{k} p_{n-1} + \frac{1}{k} p_{n-2}$$

また、

$$p_1 = \frac{1}{k}, p_2 = \frac{k-1}{k} \cdot \frac{1}{k}$$

なので、この3項間漸化式を解くと…以下略。 $n=1$ のときにも成り立つことのチェックも忘れずに。

【3】はじめに、Aが赤玉を1個、Bが白玉を1個、Cが青玉を1個持っている。表裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ の硬貨を投げ、表が出ればAとBの球を交換し、裏が出れば、BとCの玉を交換する、という操作を考える。この操作を n 回($n=1, 2, 3, \dots$)繰り返した後に、A、B、Cが赤玉を持っている確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n とする。

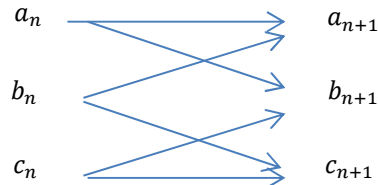
- (1) $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ を求めよ。
- (2) $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ を a_n, b_n, c_n を用いて表せ。
- (3) a_n, b_n, c_n を求めよ。

(名古屋大)

【解答】

(1) $a_1 = \frac{1}{2}, b_1 = \frac{1}{2}, c_1 = 0$

(2)



図を描くとこのようになる。(矢印は全て確率 $\frac{1}{2}$)
式で表すと、

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{2} b_n$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{2} c_n$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n$$

第1式と第3式から,

$$a_{n+1} + c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + c_n) + b_n \cdots *$$

また,

$$a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = a_n + b_n + c_n = 1$$

より,

$$a_{n+1} + c_{n+1} = 1 - b_{n+1}, \quad a_n + c_n = 1 - b_n$$

*式に代入して整理すると,

$$b_{n+1} = -\frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}$$

これを解いて,

$$b_n = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}$$

また, 第1式と第3式から,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - c_{n+1} &= \frac{1}{2}(a_n - c_n) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n (a_1 - c_1) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

つまり,

$$a_n - c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

これと, $a_n + c_n = -b_n$ から, 各辺を足し, 先ほど求めた b_n を代入することにより, 順次求まり,

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{3} \\ c_n &= -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{3} \end{aligned}$$