

## 切断面と回転体

【例題】xyz空間内の2点A(1, 0, 0), B(0, 1, 1)を通る直線をℓとし、直線ℓをz軸のまわりに一回転して得られる曲面をMとする。曲面Mと2つの平面z = 0とz = 1で囲まれた立体の体積を求めよ。

(類題：北海道大など)

z = t による切断面を考えるとよい。回転体なので切断面は円になるが、円の半径を求めるには、直線上の点をベクトルで考えて求める方法と、相似を使って幾何的に求める方法がある。

### 【解答】

(1) ℓ上の点をPとすると、

$$\vec{OP} = \vec{OA} + k\vec{AB} = (1-k, k, k) \text{ とかける。}$$

P が平面z = tと交わる時、k = tより、(1-t, t, t)となる。よって、切断面は半径 $\sqrt{(1-t)^2 + t^2}$ の円になるので、切断面の面積S(t)は

$$S(t) = \pi\{(1-t)^2 + t^2\}$$

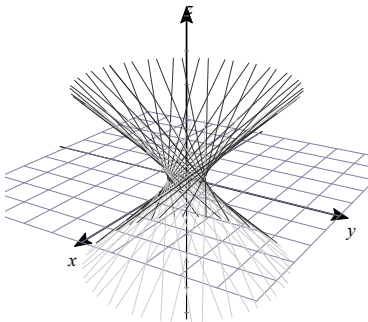
よって、求める体積Vは

$$V = \int_0^1 \pi\{(1-t)^2 + t^2\} dt$$

$$= \pi \left[ \frac{1}{3}(1-t)^3(-1) + \frac{1}{3}t^3 \right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3}\pi$$

※曲面Mの方程式は $\begin{cases} x^2 + y^2 = (1-t)^2 + t^2 \\ z = t \end{cases}$   
より $x^2 + y^2 = (1-z)^2 + z^2$ となる。



直線の式をz軸の周りに回転すると、図のようなくびれのある立体になる。これを回転一葉双曲面という。

【1】a, b, hを正の実数とする。xyz空間内の2点A(a, 0, 0), B(0, b, h)を通る直線をℓとし、直線ℓをz軸のまわりに一回転して得られる曲面をMとする。

曲面Mと2つの平面z = 0, z = hで囲まれた立体の体積をa, b, hで表せ。

### 【略解】

例題と同様にすればよい。答え $V = \frac{\pi}{3}(a^2 + b^2)h$

【2】xyz空間内で、 $0 < a < 1$ である実数aに対し、A(0, 0, 0), B(1-a, 0, 0),

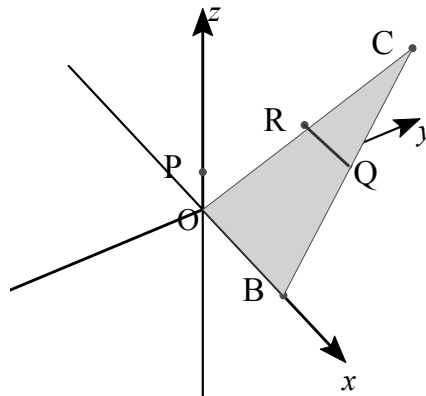
C(0, 1, a)を頂点とする三角形を考える。

この三角形をz軸のまわりに1回転してできる立体の体積を最大にするaを求めよ。

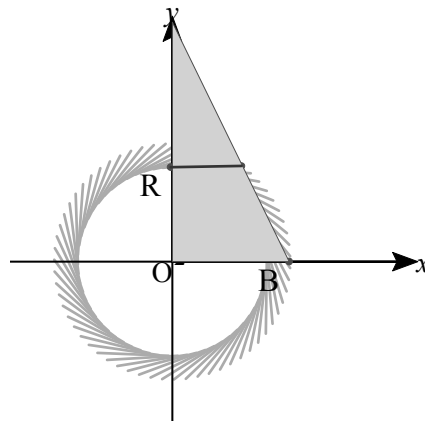
またそのときの体積を求めよ。

(名古屋大)

切断面が線分となり、その線分が回転する回転体のときには、回転軸から一番遠い点が切断面の外側の円を作り、一番近い点が切断面の内側の円を作る。三角形が登場するので、相似を使う考え方が自然であろう。



(真上から見た図)



### 【解答】

図のように点P, Q, Rをとると、線分QR上の点でPに一番近い点はR、遠い点はQなので、切断面はPQ

を半径とした円からPRを半径とした円をくりぬいたドーナツ型になる。

$Z = t$ のときの切断面の面積を $S(t)$ とすると三平方の定理から

$$\begin{aligned} S(t) &= \pi PQ^2 - \pi PR^2 \\ &= \pi(PQ^2 - PR^2) \\ &= \pi RQ^2 \end{aligned}$$

となる。

$\triangle CAB \sim \triangle CRQ$  より

$$\begin{aligned} a : a - t &= 1 - a : RQ \\ RQ &= \frac{1 - a}{a} \cdot (a - t) \end{aligned}$$

よって

$$S(t) = \pi \cdot \frac{(1 - a)^2}{a^2} \cdot (t - a)^2$$

求める体積を $V(a)$ とすると

$$\begin{aligned} V(a) &= \int_0^a S(t) dt \\ &= \pi \cdot \frac{(1 - a)^2}{a^2} \cdot \int_0^a (t - a)^2 dt \\ &= \pi \cdot \frac{(1 - a)^2}{a^2} \cdot \left[ \frac{1}{3} (t - a)^3 \right]_0^a \\ &= \frac{\pi}{3} a \cdot (a - 1)^2 \end{aligned}$$

よって

(計算略)

$$a = \frac{1}{3}, \text{ 最大値 } \frac{4}{81} \pi$$

**【3】**  $xyz$ 空間において、点 $(1, 0, 1)$ と点 $(1, 0, 2)$ を結ぶ線分を $\ell$ とし、 $\ell$ を $z$ 軸の周りに一回転してできる図形を $A$ とする。 $A$ を $x$ 軸の周りに一回転してできる立体の体積を求めよ。

(東北大)

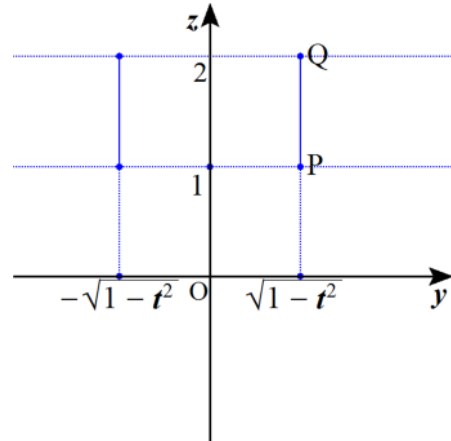
**【解答】**

$A$ は高さ1の円筒形になる。式でかくと、

$$x^2 + y^2 = 1, \quad 1 \leq z \leq 2$$

$t^2 + y^2 = 1$ より、円筒の $y$ 座標は、 $\sqrt{1 - t^2}$ である。

これを $x = t$  ( $-1 \leq t \leq 1$ ) で切った状況を $yz$ 平面に表すと、次の図のような2つの線分になる。また、図のように点 $P, Q$ をとることにする。



これを $x$ 軸の周りに回転させると、ドーナツ形になり、その面積は、

$$\begin{aligned} \pi OQ^2 - \pi OP^2 \\ &= \pi \left\{ (\sqrt{1 - t^2})^2 + 2^2 \right\} - \pi \left\{ (\sqrt{1 - t^2})^2 + 1^2 \right\} \\ &= 3\pi \end{aligned}$$

よって求める体積 $V$ は、

$$V = \int_{-1}^1 3\pi dt = 6\pi$$

**【4】**  $xyz$ 空間において、 $O(0, 0, 0)$ ,  $A(1, 1, 0)$ ,  $B(1, 0, 0)$ ,  $C(1, 0, 2)$ を4頂点とする四面体 $OABC$ を $z$ 軸のまわりに回転させるとき、四面体が通過する部分の体積を求めよ。  
(津田塾大・情報数理)

**【略解】**

$O'(0, 0, t)$ とし、 $z = t$ と $OC$ の交点を $P$ ,  $AC$ の交点を $Q$ ,  $BC$ の交点を $R$ とする。 $CR:CB = 2 - t : 2$ なので、

$$PR = QR = \frac{2 - t}{2}$$

切断面の面積は、

$$\pi O'Q^2 - \pi O'R^2 = \dots = \pi(2 - t)$$

よって、

$$\int_0^2 \pi(2 - t) dt = \dots = 2\pi$$