

切断面と回転体

【例題】 xyz 空間内の2点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 1)$ を通る直線を l とし, 直線 l を z 軸のまわりに一回転して得られる曲面を M とする. 曲面 M と2つの平面 $z = 0$ と $z = 1$ で囲まれた立体の体積を求めよ.
(類題: 北海道大など)

【1】 a, b, h を正の実数とする. xyz 空間内の2点 $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, h)$ を通る直線を l とし, 直線 l を z 軸のまわりに一回転して得られる曲面を M とする.
曲面 M と2つの平面 $z = 0$, $z = h$ で囲まれた立体の体積を a, b, h で表せ.

【2】 xyz 空間内で, $0 < a < 1$ である実数 a に対し, $A(0, 0, 0)$, $B(1-a, 0, 0)$, $C(0, 1, a)$ を頂点とする三角形を考える. この三角形を z 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を最大にする a を求めよ. またそのときの体積を求めよ.
(名古屋大)

【3】 xyz 空間において, 点 $(1, 0, 1)$ と点 $(1, 0, 2)$ を結ぶ線分を l とし, l を z 軸の周りに一回転してできる図形を A とする. A を x 軸の周りに一回転してできる立体の体積を求めよ.
(東北大)

【4】 xyz 空間において, $O(0, 0, 0)$, $A(1, 1, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $C(1, 0, 2)$ を4頂点とする四面体 $OABC$ を z 軸のまわりに回転させるとき, 四面体が通過する部分の体積を求めよ.
(津田塾大・情報数理)