

微積分の最終攻略

【第1回】

xy 平面上に $y = -1$ を準線, 点 $F(0, 1)$ を焦点とする放物線がある. この放物線上の点 $P(a, b)$ を中心として, 準線に接する円 C を描き, 接点を H とする. $a > 2$ とし, 円 C と y 軸との交点のうち F と異なるものを G とする. おうぎ形 PFH (中心角の小さいほう) の面積を $S(a)$, 三角形 PGF の面積を $T(a)$ とするとき, $a \rightarrow \infty$ としたときの極限值 $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{T(a)}{S(a)}$ を求めよ.

(1989 東大・理)

xy 平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 C がある. C を底面, $(0, 0, \sqrt{3})$ を頂点とする直円すい S を考える. 点 $P(1, 0, 0)$ および点 $Q(-2, 0, 0)$ をとる. さらに, 動点 $M(\cos \theta, \sin \theta, 0)$ ($0 < \theta < 2\pi$) を線分 MQ が M 以外に C と交わらないように動かす.

(1) θ のとりうる値の範囲を求めよ.

(2) 点 P から動点 M までは直円すい S の側面上を通り, M からは直線にそって点 Q へ向かう道を考える. このような P から Q までの全ての道の長さの最小値を求めよ.

(2002 東工大・後)

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n C_n}{2n C_n} \right)^{\frac{1}{n}}$ を求めよ.

(1988 東工大)

【第2回】

平面上に 1 辺の長さが 1 の正方形 S がある. この平面上で S を平行移動して得られる正方形で, 点 P を中心に持つものを $T(P)$ とする. このとき, 共通部分 $S \cap T(P)$ の面積が $\frac{1}{2}$ 以上となるような点 P の存在範囲を図示せよ. また, この範囲の面積を求めよ.

(1973 東大二次・文理)

$a > 1$ とする. xy 平面において, 不等式 $0 < x < \frac{\pi}{2}, 1 < y < a \sin x$ によって定められる領域の面積を S_1 , 不等式 $0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < a \sin x, 0 < y < 1$ によって定められる領域の面積を S_2 とする. $S_2 - S_1$ を最大にするような a の値と, $S_2 - S_1$ の最大値を求めよ.

(1985 東大・理)

$$x = \sqrt{\cos 2t} \cos t, \quad y = \sqrt{\cos 2t} \sin t \quad \left(-\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{4} \right)$$

と媒介変数 t で表される曲線を C とする.

- (3) 曲線 C 上の点 (x, y) における y の最大値と, そのときの x を求めよ.
 (4) 曲線 C で囲まれた図形の面積を求めよ.

(北海道大・理)

【第3回】

$$f(x) = 1 - \sin x \text{ に対し, } g(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt \text{ とおく.}$$

このとき, 任意の実数 x, y について

$$g(x+y) + g(x-y) = 2g(x)$$

が成り立つことを示せ.

(1995 東大・理)

xyz 空間の中の2点 $A(1, 0, 1), B(-1, 0, 1)$ を結ぶ直線を L とし, xy 平面における円 $x^2 + y^2 = 1$ を D とする. 点 P が L 上を動き, 点 Q が D 上を動くとき, 線分 PQ が動いてできる立体を H とする.

平面 $z = t$ ($0 \leq t \leq 1$) による立体 H の切り口 H_t の面積 S_t と, H の体積 V を求めよ.

(1990 東北大・後・理)

a を $0 < a < \frac{1}{4}$ を満たす実数とする. xy 平面で, 不等式

$$y^2 \leq x^2(1-x^2) - a$$

の表す領域を y 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積を求めよ.

(1997 東大・理)