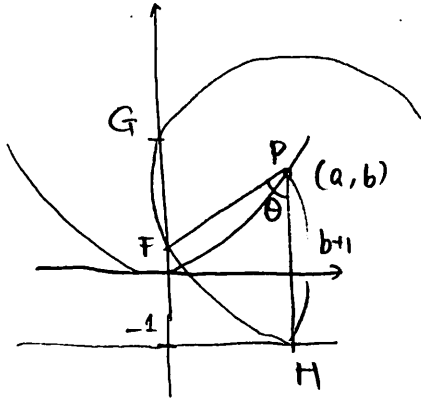


xy 平面上に $y = -1$ を準線, 点 $F(0, 1)$ を焦点とする放物線がある. この放物線上の点 $P(a, b)$ を中心として, 準線に接する円 C を描き, 接点を H とする. $a > 2$ とし, 円 C と y 軸との交点のうち F と異なるものを G とする. おうぎ形 PFH (中心角の小さいほう) の面積を $S(a)$, 三角形 PGF の面積を $T(a)$ とするとき, $a \rightarrow \infty$ としたときの極限值 $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{T(a)}{S(a)}$ を求めよ.

(1989 東大・理)



(放物線上の点を (x, y) とすると
 $(0, 1)$ と (x, y) の距離は $y+1$ と
 等しいから
 $x^2 + (y-1)^2 = (y+1)^2$
 $x^2 = 4y$

点 C は中心 (a, b) , 半径 $b+1$ の円
 となる

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = (b+1)^2$$

$$x^2 = 4b \text{ と } x=0 \text{ を代入して}$$

整理すると

$$y^2 - 2by + 2b + 1 = 0$$

$$y = 1, 2b-1$$

$$\text{よって } F(0, 1), G(0, 2b-1)$$

$\angle FPH = \theta$ とすると

$$S(a) = \frac{1}{2}(b+1)^2 \theta$$

$$T(a) = (2b-1) \times (b+1) \sin \theta \times \frac{1}{2}$$

$$\text{よって } \frac{T(a)}{S(a)} = \frac{(b-1)(b+1) \sin \theta}{\frac{1}{2}(b+1)^2 \theta}$$

$$= \frac{2 \sin \theta}{\theta} \cdot \frac{(b-1)}{(b+1)}$$

$$= \frac{2 \sin \theta}{\theta} \cdot \frac{(1 - \frac{1}{b})}{(1 + \frac{1}{b})}$$

$a \rightarrow \infty$ とき $a > 2$, $b \rightarrow \infty$; $\theta \rightarrow 0$ となる

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{T(a)}{S(a)} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{2 \sin \theta}{\theta} \cdot \frac{(1 - \frac{1}{b})}{(1 + \frac{1}{b})}$$

$$= 2$$

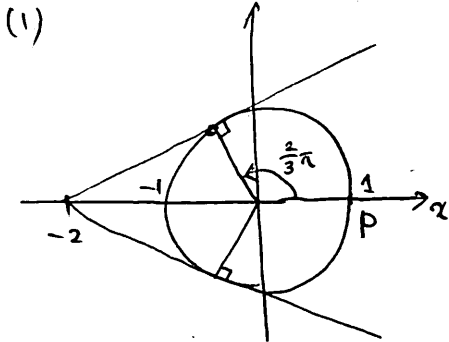
※ 非常に基本的で易しい。

xy 平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 C がある。 C を底面、 $(0, 0, \sqrt{3})$ を頂点とする直円錐 S を考える。点 $P(1, 0, 0)$ および点 $Q(-2, 0, 0)$ をとる。さらに、動点 $M(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を線分 MQ が M 以外に C と交わらないように動かす

(1) θ のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 点 P から動点 M までは直円錐 S の側面上を通り、 M からは直線にそって点 Q へ向かう道を考える。このような P から Q までの全ての道の長さの最小値を求めよ。

(2002 東工大・後)

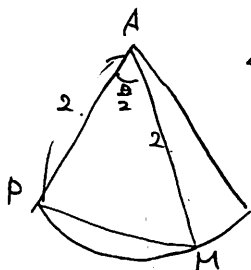
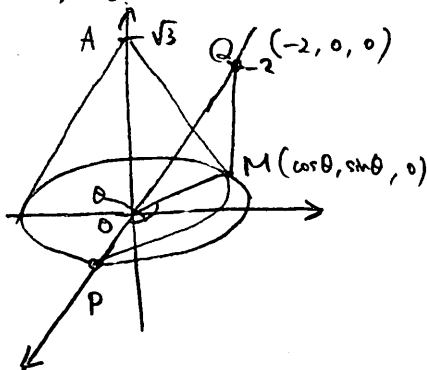


上図の如くに、接するときは M は
上図より $\theta = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ とする。

$$\therefore \frac{2}{3}\pi \leq \theta \leq \frac{4}{3}\pi$$

(2) 対称性より $\frac{2}{3}\pi \leq \theta \leq \pi$

で考える。



$$\angle POM = \theta, PM$$

$$\widehat{PM} = \theta$$

$$\therefore \angle PAM = \frac{\theta}{2}$$

$$PM = 4 \sin \frac{\theta}{4}$$

$$MQ = \sqrt{(\cos\theta + 2)^2 + \sin^2\theta}$$

より、道のりを L とすると

$$L = PM + MQ$$

$$4 \sin \frac{\theta}{4} = 4 \sin \frac{\theta}{2}$$

$$= 4 \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\theta}{2}}{2}}$$

$$= 2\sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \frac{\theta}{2}}$$

$$\sqrt{(\cos\theta + 2)^2 + \sin^2\theta} = \sqrt{1 + 4 \cos\theta + 4} \quad \cos \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos\theta}{2}$$

$$= \sqrt{1 + 4 \cdot (2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1) + 4}$$

$$= \sqrt{1 + 8 \cos^2 \frac{\theta}{2}}$$

より、 $\cos \frac{\theta}{2} = t$ とおくと、 $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$

$$L = 2\sqrt{2} \sqrt{1-t} + \sqrt{1+8t^2}$$

$f(t) = 2\sqrt{2} \sqrt{1-t} + \sqrt{1+8t^2}$ とすると

$$f'(t) = 2\sqrt{2} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{1-t}} + \frac{8t}{2\sqrt{1+8t^2}}$$

$$= \frac{-\sqrt{2} \sqrt{1+8t^2} + 8t \sqrt{1-t}}{\sqrt{1-t} \cdot \sqrt{1+8t^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2} (4\sqrt{2}t \sqrt{1-t} - \sqrt{1+8t^2})}{\sqrt{1-t} \sqrt{1+8t^2}}$$

$$4\sqrt{2}t \sqrt{1-t} \geq \sqrt{1+8t^2}$$

$$\Leftrightarrow (4t-1)(8t^2-4t-1) \leq 0$$

$$\because 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \therefore 8t^2 - 4t - 1 < 0$$

だから、増減表は

t	0	...	$\frac{1}{4}$...	$\frac{1}{2}$
$f'(t)$			-	0	+
$f(t)$			↘	極小	↗

より、 L の最小値は

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{1+8 \cdot \frac{1}{16}}$$

$$= \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{{}^{3n}C_n}{{}^{2n}C_n} \right)^{\frac{1}{n}} \text{ を求めよ.}$$

(1988 東工大)

$$\begin{aligned} & \log \left(\frac{{}^{3n}C_n}{{}^{2n}C_n} \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{n} \log \frac{{}^{3n}C_n}{{}^{2n}C_n} \\ &= \frac{1}{n} \log \frac{\frac{(3n)!}{(2n)! \cdot n!}}{\frac{(2n)!}{n! \cdot n!}} \\ &= \frac{1}{n} \log \frac{3n \cdot (3n-1) \cdots (2n+1)}{2n \cdot (2n-1) \cdots (n+1)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \{ (2n+k) - \log(n+k) \} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \frac{2n+k}{n+k} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \frac{2 + \frac{k}{n}}{1 + \frac{k}{n}} \end{aligned}$$

* この式が区間求積に $\tau, 2u < n$ のポイント。
"全単射" は "対一対応" である。

$$\begin{aligned} \text{よって.} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(\frac{{}^{3n}C_n}{{}^{2n}C_n} \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \int_0^1 \log \frac{2+x}{1+x} dx \\ &= \int_0^1 \log(2+x) dx - \int_0^1 \log(1+x) dx \\ &= \left[(2+x) \log(2+x) - (2+x) \right]_0^1 - \left[(1+x) \log(1+x) - (1+x) \right]_0^1 \\ &= 3 \log 3 - 4 \log 2. \end{aligned}$$

$$\left(\int \log x dx = x \log x - x + C \text{ (定数 } C \text{)} \right)$$

よって $y = \log x$ は連続関数である。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(\frac{{}^{3n}C_n}{{}^{2n}C_n} \right)^{\frac{1}{n}} = \log \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{{}^{3n}C_n}{{}^{2n}C_n} \right)^{\frac{1}{n}}$$

よって

$$3 \log 3 - 4 \log 2 = \log \frac{3^3}{2^4} = \log \frac{27}{16}$$

$$\text{よって.} \quad \log \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{{}^{3n}C_n}{{}^{2n}C_n} \right)^{\frac{1}{n}} = \log \frac{27}{16}$$

$y = \log x$ は全単射である。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{{}^{3n}C_n}{{}^{2n}C_n} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{27}{16}$$

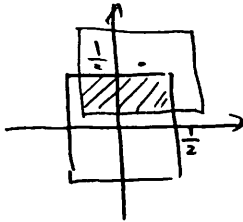
平面上に1辺の長さが1の正方形 S がある. この平面上で S を平行移動して得られる正方形で, 点 P を中心に持つものを $T(P)$ とする. このとき, 共通部分 $S \cap T(P)$ の面積が $\frac{1}{2}$ 以上となるような点 P の存在範囲を図示せよ. また, この範囲の面積を求めよ.

(1973 東大二次・文理)

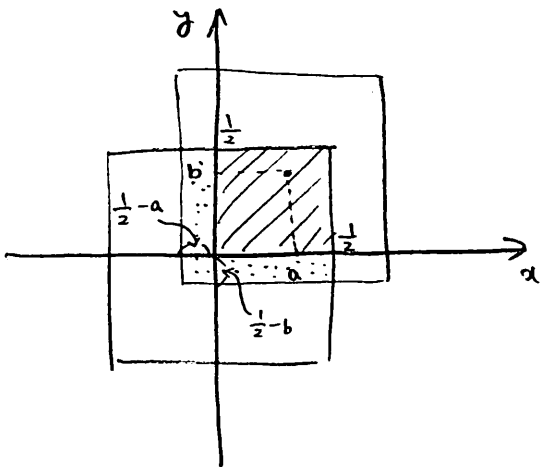
$\therefore -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$
に固定して考える.

$P(a, b)$ とする. また, $P(a, b)$ は第1象限の点とする.

$0 \leq a \leq \frac{1}{2}, 0 \leq b \leq \frac{1}{2}$
をみたす. なぜなら, $\frac{1}{2} < a$ ならば $\frac{1}{2} < b$ とする.



たとえば, $\frac{1}{2} < a$ とすると, 上図のように, S の第1, 2象限としか交わらないので, $S \cap T(P)$ が $\frac{1}{2}$ 以上とすることは無い. よって, 次の図のようにする.



$\square + \square$ を考えればよい

よって,

$$\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}-a\right)\left(\frac{1}{2}-b\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-b\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-a\right) \geq \frac{1}{2}$$

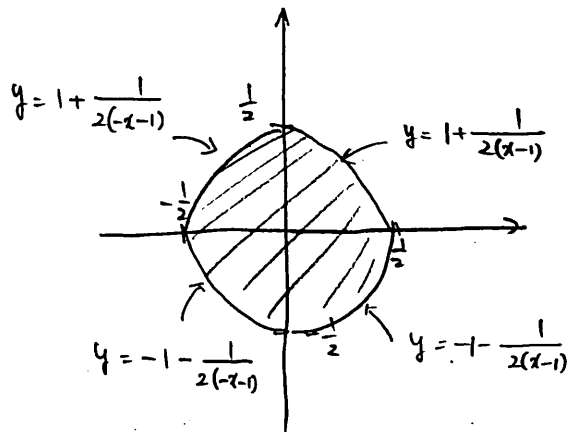
$$1 - a - b + ab \geq \frac{1}{2}$$

$0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ より)

$$b \leq \frac{a - \frac{1}{2}}{a - 1}$$

$$b \leq 1 + \frac{1}{2(a-1)}$$

他の象限でも, 同様に考えればよい. 求める面積は, 図のような部分になる

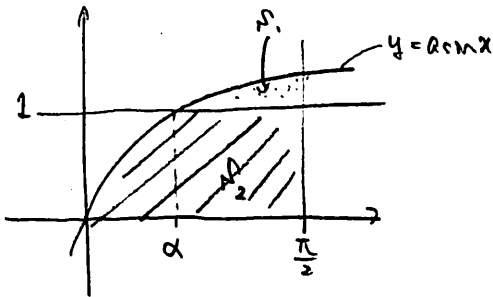


求める面積は

$$\begin{aligned} & 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2(x-1)}\right) dx \\ &= 4 \left[x + \frac{1}{2} \log|x-1| \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= 4 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} \right) \\ &= 2 - 2 \log 2 \end{aligned}$$

$a \geq 1$ とする. xy 平面において, 不等式 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 1 \leq y \leq a \sin x$ によって定められる領域の面積を S_1 , 不等式 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 1 \leq y \leq a \sin x, 0 \leq y \leq 1$ によって定められる領域の面積を S_2 とする. $S_2 - S_1$ を最大にするような a の値と, $S_2 - S_1$ の最大値を求めよ.

(1985 東大・理)



$y = a \sin x$ と $y = 1$ の交点 $x = \alpha$ とする.

つまり $a \sin \alpha = 1$ の解 $x = \alpha$ とする.

$$a \sin \alpha = 1.$$

$$\begin{aligned} S_2 - S_1 &= \int_0^{\alpha} a \sin x \, dx + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \\ &\quad - \left\{ \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} a \sin x \, dx - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right\} \\ &= \left[-a \cos x \right]_0^{\alpha} - \left[-a \cos x \right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} + \pi - 2\alpha \\ &= -2a \cos \alpha + a + \pi - 2\alpha. \end{aligned}$$

これを $f(\alpha)$ とする. $a = \frac{1}{\sin \alpha}$ とする.

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= -2 \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha} + \pi - 2\alpha \\ &= \frac{1 - 2 \cos \alpha}{\sin \alpha} + \pi - 2\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= \frac{\sin \alpha \cdot 2 \sin \alpha - (1 - 2 \cos \alpha) \cdot \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - 2 \\ &= \frac{(2 \cos \alpha - 1) \cdot \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \end{aligned}$$

$$0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2} \text{ (1)}$$

増減表を $x = \alpha$ とする.

α	0	...	$\frac{\pi}{3}$...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\alpha)$		+	0	-	0
$f(\alpha)$		↗		↘	

よって $\alpha = \frac{\pi}{3}$ のとき最大, つまり

$$a = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ のとき最大.}$$

このときの値は,

$$\begin{aligned} &-2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}} + \pi - 2 \cdot \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

$$x = \sqrt{\cos 2t} \cos t, \quad y = \sqrt{\cos 2t} \sin t \quad \left(-\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{4}\right)$$

と媒介変数 t で表される曲線を C とする。

- (1) 曲線 C 上の点 (x, y) における y の最大値と、そのときの x を求めよ。
- (2) 曲線 C で囲まれた図形の面積を求めよ。

(北海道大・理)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{-2\sin 2t}{2\sqrt{\cos 2t}} \cdot \sin t + \sqrt{\cos 2t} \cdot \cos t \\ &= \frac{-\sin 2t \sin t + \cos 2t \cos t}{\sqrt{\cos 2t}} \\ &= \frac{\cos 3t}{\sqrt{\cos 2t}} \end{aligned}$$

$-\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow -\frac{3\pi}{4} \leq 3t \leq \frac{3\pi}{4}$
 $\cos 3t = 0$ とするときは、 $3t = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ となる
 したがって $t = -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$ となる。

t	$-\frac{\pi}{4}$	\dots	$-\frac{\pi}{6}$	\dots	$\frac{\pi}{6}$	\dots	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{dy}{dt}$			$-$	0	$+$	0	$-$
y	0		\downarrow		\uparrow		\downarrow

よって、 $t = \frac{\pi}{6}$ で最大値をとる。

したがって
 $y = \sqrt{\cos \frac{\pi}{3}} \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{4}$
 $x = \sqrt{\cos \frac{\pi}{3}} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

(2) x, y を t の関数とみて $x(t), y(t)$ とおくと

$$x(-t) = x(t), \quad y(-t) = -y(t)$$

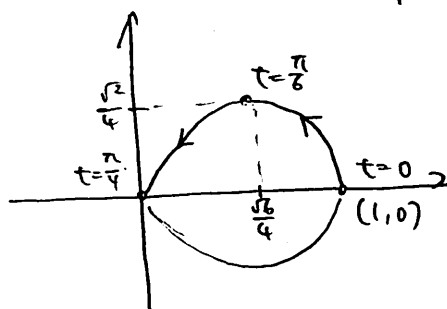
よって C は x 軸対称。

$y = 0$ となる $t = 0, \frac{\pi}{4}$
 \downarrow
 $x = 1, \quad y = 0$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = -\frac{\sin 3t}{\sqrt{\cos 2t}}$$

よって、 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ における増減は次の通り

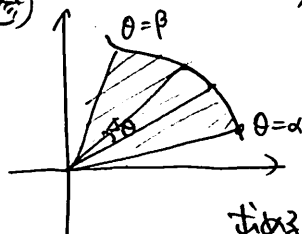
t	0	\dots	$\frac{\pi}{6}$	\dots	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{dx}{dt}$			$-$		
$\frac{dy}{dt}$			$+$	0	$-$
(x, y)	$(1, 0)$		$\left(\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$		$(0, 0)$



よって面積 A は

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^1 y \, dx \\ &= 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \sqrt{\cos 2t} \sin t \cdot \left(-\frac{\sin 3t}{\sqrt{\cos 2t}}\right) dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3t \cdot \sin t \, dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} (\cos 2t - \cos 4t) \, dt \\ &= \left[\frac{1}{2} \sin 2t - \frac{1}{4} \sin 4t \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(参考)



極座標をとると

$$\begin{aligned} A &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 d\theta \text{ と考へる} \end{aligned}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 = \cos 2t \text{ となる}$$

よって面積は

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \cos 2\theta \, d\theta = \dots = \frac{1}{2}$$

と考へると一致する

$f(x) = 1 - \sin x$ に対し, $g(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt$ とおく.
 このとき, 任意の実数 x, y について

$$g(x+y) + g(x-y) \geq 2g(x)$$

が成り立つことを示せ.

(1995 東大・理)

(条件式をみると, $g'(x)$ を計算したくなる。ここで, 左-右の解析に用いる。)。

$$g(x) = x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x t f(t)dt$$

$$\begin{aligned} \text{よ) } g'(x) &= 1 \cdot \int_0^x f(t)dt + x \cdot f(x) - x f(x) \\ &= \int_0^x f(t)dt. \end{aligned}$$

$$g''(x) = f(x) = 1 - \sin x.$$

ここで, x を定数とみて, (y の関数とみて)

$$h(y) = g(x+y) + g(x-y) - 2g(x)$$

とおく。

$$h'(y) = g'(x+y) - g'(x-y)$$

$$h''(y) = g''(x+y) + g''(x-y)$$

であるが, 任意の実数 x に対し

$$g''(x) = 1 - \sin x \geq 0 \text{ であるから}$$

常に $h''(y) \geq 0$ である。

よって $h'(y)$ は単調に増加する。

$$\text{また, } h'(0) = g'(x) - g'(x) = 0 \text{ である。}$$

y	...	0	...	増減表は 左図。
$h'(y)$	-	0	+	
$h(y)$	↘	0	↗	

$$h(0) = g(x) + g(x) - 2g(x) = 0.$$

よって, 最小値 0.

↑↑↑↑↑

$$g(x+y) + g(x-y) \geq 2g(x)$$

が成り立つ

(B1) $g(x)$ は普通に計算して,

$$g(x) = \frac{x^2}{2} - x + \sin x \text{ となる。}$$

よって (B1) は成り立つ。

(B2) $g(x+y) + g(x-y) \geq 2g(x)$

$$\text{よ) } x+y = u, x-y = v \text{ とおけば}$$

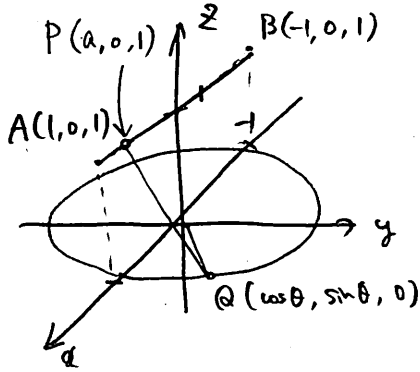
$$g(u) + g(v) \geq 2g\left(\frac{u+v}{2}\right)$$

よって $g(x)$ の凸性の証明に帰着される。

xyz 空間の中の2点 $A(1, 0, 1), B(-1, 0, 1)$ を結ぶ直線を L とし, xy 平面における円 $x^2 + y^2 \leq 1$ を D とする. 点 P が L 上を動き, 点 Q が D 上を動くとき, 線分 PQ が動いてできる立体を H とする.

平面 $z = t (0 \leq t \leq 1)$ による立体 H の切り口 H_t の面積 S_t と, H の体積 V を求めよ.

(1990 東北大・後・理)



$$P(a, 0, 1), Q(\cos \theta, \sin \theta, 0)$$

と置く ($-1 \leq a \leq 1$).

PQ 上の点を R とする

$$\begin{aligned} \vec{OR} &= \vec{OP} + k\vec{PQ} \\ &= \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} \cos \theta - a \\ \sin \theta \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とわかる. 平面 $z = t$ と PQ との交点 R は

$$1 - k = t \text{ より}$$

$$k = 1 - t \text{ となる}$$

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (1-t) \begin{pmatrix} \cos \theta - a \\ \sin \theta \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} at + (1-t)\cos \theta \\ (1-t)\sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である.

$$x = at + (1-t)\cos \theta$$

$$y = (1-t)\sin \theta$$

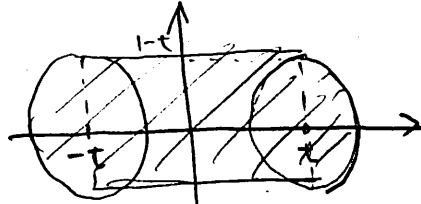
として, θ を消去すると

$$(x - at)^2 + y^2 = (1-t)^2$$

となり, これは, 中心 $(at, 0)$, 半径 $(1-t)$

の円を表す. これは $-1 \leq a \leq 1$ で

動くとき, 円の中心が動く.



斜線部分の面積が $S_t = \pi(1-t)^2$

$$\begin{aligned} S(t) &= \pi(1-t)^2 + 2t \cdot 2(1-t) \\ &= \pi(1-t)^2 + 4t(1-t) \end{aligned}$$

よって求める体積は

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 S(t) dt \\ &= \left[-\frac{1}{3}(1-t)^3 \pi + 2t^2 - \frac{4}{3}t^3 \right]_0^1 \\ &= 2 - \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\pi \\ &= \frac{\pi + 2}{3} \end{aligned}$$

a を $0 < a < \frac{1}{4}$ を満たす実数とする. xy 平面で, 不等式

$$y^2 \leq x^2(1-x^2) - a$$

の表す領域を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ.

(1997 東大・理)

$$y^2 \leq x^2(1-x^2) - a$$

x を $-x$ に置きかえても,
 y を $-y$ に置きかえても変わらない式
 なので, x 軸, y 軸に 関して対称.
 よって $x \geq 0$ とする.
 また, 変形すると

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} - a$$

で, $0 < a < \frac{1}{4}$ より右辺は正,
 y のとりうる範囲は

$$0 \leq y \leq \frac{\sqrt{1-4a}}{2}$$

である. x のときは

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1-4a-4y^2}{4}$$

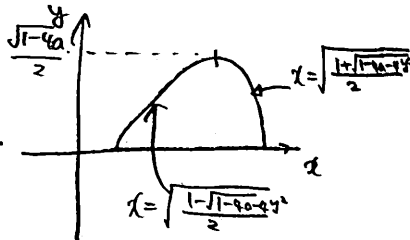
$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1-4a-4y^2}}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1-4a-4y^2}}{2}$$

よって, $0 < a < \frac{1}{4}$, $y^2 > 0$ より

$$\sqrt{1-4a-4y^2} \leq 1 \text{ より, 左辺は } 0 \text{ 以上}$$

となる.

$$\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-4a-4y^2}}{2}} \leq x \leq \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-4a-4y^2}}{2}}$$



この体積 V は

$$V = 2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{1-4a}}{2}} \left\{ \left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-4a-4y^2}}{2}} \right)^2 - \left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-4a-4y^2}}{2}} \right)^2 \right\} dy$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{1-4a}}{2}} \sqrt{1-4a-4y^2} dy$$

よって, $r = \frac{\sqrt{1-4a}}{2}$ とおくと

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \cdot \int_0^r 2\sqrt{r^2-y^2} dy \\ &= 4\pi \times \frac{\pi}{4} r^2 \\ &= \frac{1-4a}{4} \pi^2 \end{aligned}$$

※. もともと r は, 2つの関数の値が一致する点
 である. $1-4a-4y^2=0$ の解である.
 この解を α, β とおいて \int_{α}^{β} としても
 計算はあんまりではない.