

複素数平面の最終攻略

$\frac{z}{2} + \frac{1}{z}$ が 0 以上 2 以下の実数であるような複素数 z ($z \neq 0$) を表す複素数平面上の点の集合を、式で表し、図示せよ。

(1998 北海道大・理)

α は絶対値 1 の複素数とし、複素数 z に対して、 $\omega = \frac{\bar{\alpha}z - 2}{2z - \alpha}$ とおく。ただし $\bar{\alpha}$ は α の共役複素数を表す。

- (1) 複素数平面上で、 z が原点と点 α を通る直線上 (ただし、点 $\frac{\alpha}{2}$ を除く) を動くとき、 ω の表す点は原点と点 $\bar{\alpha}$ を通る直線上にあることを示せ。
- (2) 複素数平面上で、 z が複素数 $|z| > 1$ を満たすとき、複素数 ω を表す点はどのような図形上を動くか。

(2005 千葉大)

α, β を 0 でない複素数とし、

$$\alpha' = \frac{\alpha}{|\alpha|^2}, \quad \beta' = \frac{\beta}{|\beta|^2}$$

とする。

- (3) $|\alpha' - \beta'|$ を $|\alpha|, |\beta|, |\alpha - \beta|$ を用いて表せ。
- (4) α, β が $|\alpha - \beta| = 1, |\alpha| = 2$ をみたしながら動くとき、 $|\alpha' - \beta'|$ の最大値と最小値を求めよ。

(1999 一橋大)