

$\frac{z}{2} + \frac{1}{z}$ が 0 以上 2 以下の実数であるような複素数 $z (z \neq 0)$ を表す複素数平面上の点の集合を、式で表し、図示せよ。

(1998 北海道大・理)

$\frac{z}{2} + \frac{1}{z}$ が実数だから

$$\frac{z}{2} + \frac{1}{z} = \overline{\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{z}\right)}$$

4))

$$\frac{z}{2} + \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{2} + \frac{1}{\bar{z}}$$

$$z\bar{z} + 2\bar{z} = z\bar{z} + 2z$$

$$z\bar{z}(z - \bar{z}) = 2(z - \bar{z})$$

$$(z\bar{z} - 2)(z - \bar{z}) = 0$$

$$\therefore z\bar{z} = 2 \text{ or } z = \bar{z}$$

i) $z\bar{z} = 2$ のとき

$|z| = \sqrt{2}$ より z は原点中心、半径 $\sqrt{2}$ の円である。よって

$$z = \sqrt{2}(\cos\theta + i\sin\theta) \text{ とおける}$$

$$\frac{z}{2} + \frac{1}{z} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta + i\sin\theta)$$

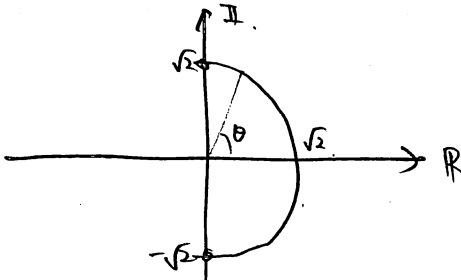
$$+ \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$= \sqrt{2}\cos\theta$$

$$0 \leq \frac{z}{2} + \frac{1}{z} \leq 2 \text{ より}$$

$$0 \leq \sqrt{2}\cos\theta \leq 2$$

4)) 図の太線部



ii) $z = \bar{z}$ のとき

z は実数だから

$$0 \leq \frac{z}{2} + \frac{1}{z} \leq 2$$

$$0 \leq \frac{z^2 + 2}{2z} \leq 2$$

$z^2 + 1 > 0$ より、左側の不等式は $z \geq 0$ 。

よって右側の不等式は

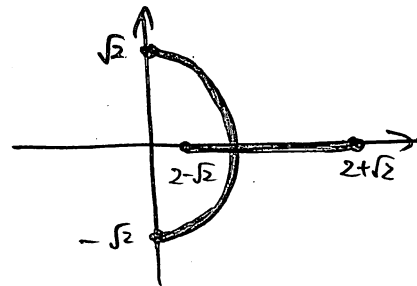
$$z^2 + 2 \leq 4z$$

$$z^2 - 4z + 2 \leq 0$$

$$2 - \sqrt{2} \leq z \leq 2 + \sqrt{2}$$

よって $z \geq 0$ を満たす。

i), ii)より 図の太線部



別解として $z = x + iy$ とおくと

Δ のとき

$$\frac{z}{2} + \frac{1}{z} = \dots = \frac{x(x^2 + y^2) + 2x}{2(x^2 + y^2)} + \frac{\sqrt{(x^2 + y^2) - 2}y}{2(x^2 + y^2)}$$

と分る。(虚部) = 0 より $y = 0$ or $x^2 + y^2 = 2$

と分る $y = 0$ のとき 実部は

$$0 \leq \frac{x^3 + 2x}{2x^2} \leq 2$$

4)) 4)) $2 - \sqrt{2} \leq x \leq 2 + \sqrt{2}$ を得る。

$x^2 + y^2 = 2$ のとき

$$0 \leq \frac{x \cdot 2 + 2x}{2 \cdot 2} \leq 2$$

4)) $0 \leq x \leq 2$ を得る。

よって、図の太線部が答えである。

α は絶対値1の複素数とし、複素数 z に対して、 $w = \frac{\bar{\alpha}z - 2}{2z - \alpha}$ とおく。ただし $\bar{\alpha}$ は α の共役複素数を表す。

- (1) 複素数平面上で、 z が原点と点 α を通る直線上(ただし、点 $\frac{\alpha}{2}$ を除く)を動くとき、 w の表す点は原点と点 $\bar{\alpha}$ を通る直線上にあることを示せ。
- (2) 複素数平面上で、 z が複素数 $|z| > 1$ を満たすとき、複素数 w を表す点はどのような図形上を動くか。

(2005 千葉大)

(1). $z = k\alpha$ とする (k は $\frac{1}{2}$ でない実数)

$\Rightarrow \alpha \neq \pm 1$

$$w = \frac{\bar{\alpha} \cdot k\alpha - 2}{2k\alpha - \alpha}$$

$$= \frac{k-2}{(2k-1)\alpha} \quad (\because \alpha\bar{\alpha} = 1)$$

$\therefore z = \frac{1}{\alpha}$ とおくと

$$w = \frac{k-2}{2k-1} \alpha$$

より成り立つ。

(2). $w = \frac{\bar{\alpha}z - 2}{2z - \alpha}$

$$(2z - \alpha)w = \bar{\alpha}z - 2$$

$$(2w - \bar{\alpha})z = \alpha w - 2$$

$w = \frac{\bar{\alpha}}{2}$ とする。 $\Rightarrow \alpha$ 式 α 左辺は0,

右辺は $\alpha \cdot \frac{\bar{\alpha}}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$ となり

成り立たないから、 $2w - \bar{\alpha} \neq 0$

$$z = \frac{\alpha w - 2}{2w - \bar{\alpha}}$$

$|z| > 1$ より

$$\left| \frac{\alpha w - 2}{2w - \bar{\alpha}} \right| > 1$$

$$|\alpha w - 2| > |2w - \bar{\alpha}|$$

$$(\alpha w - 2)(\bar{\alpha} \bar{w} - 2) > (2w - \bar{\alpha})(2\bar{w} - \alpha)$$

$$\alpha \bar{\alpha} w \bar{w} - 2\alpha \bar{w} - 2\bar{\alpha} w + 4$$

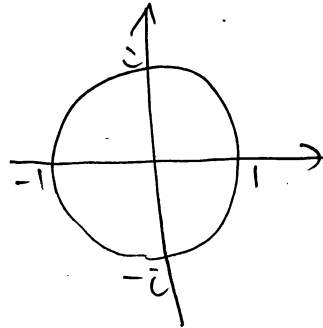
$$> 4w \bar{w} - 2\alpha w - 2\bar{\alpha} \bar{w} + \alpha \bar{\alpha}$$

$$-3w \bar{w} > -3$$

$$w \bar{w} < 1$$

$$|w| < 1$$

より、中心が原点、半径1の円



$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\delta z + \gamma}$$

($\alpha, \beta, \delta, \gamma$ は複素数,
 $\alpha\gamma - \beta\delta \neq 0$)

$\alpha \neq \gamma$. 1次分教変換 (x \rightarrow z変換) とする

i) $\beta = \gamma = 0, \delta = 1$ とする

$w = \alpha z$ となり、原点中心の回転・拡大

ii) $\alpha = \delta = 1, \gamma = 0$ とする

$w = z + \beta$ となり、平行移動

iii) $\alpha = \delta = 0, \beta = \gamma = 1$ とする

$w = \frac{1}{z}$ となり、逆数

1次分教変換の合成は1次分教変換となり

(行列の積でわかることやわかる...)

の? : この式を組合せたものが $w = \frac{\alpha z + \beta}{\delta z + \gamma}$

$\alpha \neq \gamma$ となる。

wikiに一般的な記述がある。高校生には難いかな。一読する価値あり。

α, β を 0 でない複素数とし,

$$\alpha' = \frac{\alpha}{|\alpha|^2}, \quad \beta' = \frac{\beta}{|\beta|^2}$$

とする.

(1) $|\alpha' - \beta'|$ を $|\alpha|, |\beta|, |\alpha - \beta|$ を用いて表せ.

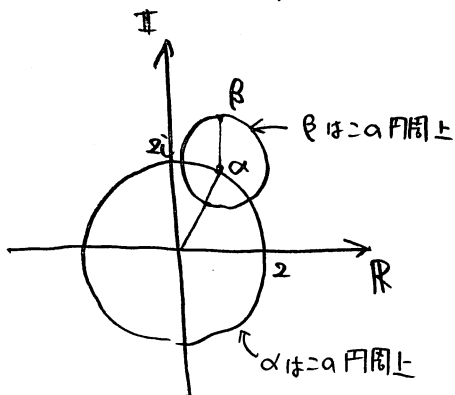
(2) α, β が $|\alpha - \beta| = 1, |\alpha| = 2$ をみたしながら動くとき, $|\alpha' - \beta'|$ の最大値と最小値を求めよ.

(1999 一橋大)

$$\begin{aligned} (1) \quad |\alpha' - \beta'| &= \left| \frac{\alpha}{|\alpha|^2} - \frac{\beta}{|\beta|^2} \right| \\ &= \left| \frac{\alpha}{\alpha \bar{\alpha}} - \frac{\beta}{\beta \bar{\beta}} \right| \\ &= \left| \frac{1}{\bar{\alpha}} - \frac{1}{\bar{\beta}} \right| \\ &= \left| \frac{\bar{\beta} - \bar{\alpha}}{\bar{\alpha} \bar{\beta}} \right| \\ &= \frac{|\bar{\beta} - \bar{\alpha}|}{|\bar{\alpha} \bar{\beta}|} \\ &= \frac{|\beta - \alpha|}{|\alpha| \cdot |\beta|} \end{aligned}$$

(2) $|\alpha| = 2$ より

α は原点中心とする半径 2 の円周上にある. また, $|\alpha - \beta| = 1$ より α と β の距離は 1. 従って, 下図のような位置関係である.

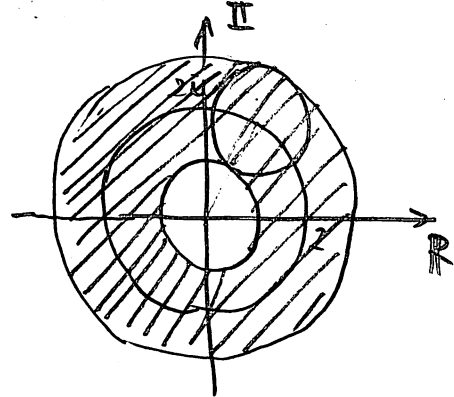


(1) より

$$|\alpha' - \beta'| = \frac{|\beta - \alpha|}{|\alpha| \cdot |\beta|}$$

$$= \frac{1}{2 \cdot |\beta|}$$

また, 先ほどの図より, β の通過領域は下図の斜線部分.



より

$$1 \leq |\beta| \leq 3$$

より 最大値は $|\beta| = 1$ のとき $\frac{1}{2}$
最小値は $|\beta| = 3$ のとき $\frac{1}{6}$

* 計算をする. 意味を考へる. また計算する...
複素数の問題は大体こんな感じ.