

行列の最終攻略

平面上の2点 $P(a, c), Q(b, d)$ に対して、一次変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を考える. 原点 O を中心とする単位円 $x^2 + y^2 = 1$ を C とする.

- (1) P, Q がともに C 上にあり, ベクトル \vec{OP} と \vec{OQ} が直交するとき, この1次変換は C 上の任意の点を C 上に移すことを示せ.
- (2) 逆に, この1次変換が C 上の任意の点を C 上に移すならば, P, Q はともに C 上の点であり, かつベクトル \vec{OP} と \vec{OQ} が直交していることを示せ.

(1990 九州大)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ とする.}$$

- (1) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ で, $x^2 - 3y^2 = 1, x > 0, y > 1$ ならば,

$$x'^2 - 3y'^2 = 1, \quad 0 < y' < y$$

が成立することを示せ.

- (2) x, y が $x^2 - 3y^2 = 1$ をみたす自然数ならば, ある自然数 n をとると

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となることを示せ.

(1998 京都大)

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ によって定まる xy 平面の1次変換を f とする. 原点以外のある点 P が f によって P 自身に写されるならば, 原点を通らない直線 l であって, l のどの点も f によって l の点に写されるようなものが存在することを証明せよ.

(1982 東大)