

平面上の2点 $P(a, c), Q(b, d)$ に対して、一次変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を考える。原点 O を中心とする単位円 $x^2 + y^2 = 1$ を C とする。

(1) P, Q がともに C 上にあり、ベクトル \vec{OP} と \vec{OQ} が直交するとき、この1次変換は C 上の任意の点を C 上に移すことを示せ。

(2) 逆に、この1次変換が C 上の任意の点を C 上に移すならば、 P, Q はともに C 上の点であり、かつベクトル \vec{OP} と \vec{OQ} が直交していることを示せ。

(1990 九州大)

(1) P, Q は $x^2 + y^2 = 1$ 上にあるから

$$a^2 + c^2 = 1$$

$$b^2 + d^2 = 1$$

$$\vec{OP} \cdot \vec{OQ} = 0 \text{ より}$$

$$ab + cd = 0$$

C 上の任意の点 (x, y) に対し

$$x' = ax + by$$

$$y' = cx + dy$$

だから

$$x'^2 + y'^2 = (ax + by)^2 + (cx + dy)^2$$

$$= a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 + c^2x^2 + 2cdxy + d^2y^2$$

$$= (a^2 + c^2)x^2 + 2(ab + cd)xy + (b^2 + d^2)y^2$$

$$= 1$$

よって (x', y') も C 上にある。

よって示された。

(2) C 上の任意の点を C 上にうつすから

$(1, 0), (0, 1)$ も C 上の点に移る。

よって $(a, c), (b, d)$ も

C 上にあるから

$$a^2 + c^2 = 1$$

$$b^2 + d^2 = 1$$

となり、 P, Q は円周上にある

ことからわかる。

また、 $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ も C 上の点に

移るから

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(c+d) \end{pmatrix}$$

も C 上にある。よって

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(c+d) \right\}^2 = 1$$

$$(a+b)^2 + (c+d)^2 = 2$$

$$a^2 + c^2 = 1, b^2 + d^2 = 1 \text{ より}$$

$$ab + cd = 0$$

よって $\vec{OP} \cdot \vec{OQ} = 0$ より、直交する。

* ${}^tAA = A^tA = E$ を満たす行列は直交行列という性質

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ なら } A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

* 直交行列の行列式の値は ± 1

$$1 = \det E = \det AA^t = \det A A^t = \det A \det A^t = \det(A)^2$$

* $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ は正規直交基底

* $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ の形で表せる。

* 直交行列で表せる一次変換は

・任意の図形をそれと合同な図形に移す

・任意の線分をそれと等しい線分に移す

・単位円を単位円に移す

* \therefore 任意の2点の位置関係は \vec{p}, \vec{q} と同じ

$$|\vec{p} - \vec{q}| = |A\vec{p} - A\vec{q}| = |A(\vec{p} - \vec{q})| \text{ より } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\vec{p} - \vec{q} = (x, y) \text{ とおくと}$$

$$(ax + by)^2 + (cx + dy)^2 = x^2 + y^2$$

$$(a^2 + c^2)x^2 + 2(ab + cd)xy + (b^2 + d^2)y^2 = x^2 + y^2$$

$$\therefore a^2 + c^2 = 1, ab + cd = 0, b^2 + d^2 = 1$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \text{ は } \pm 1, (a, c) \perp (b, d)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ とする.}$$

$$(1) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ で, } x^2 - 3y^2 = 1, x > 0, y \geq 1 \text{ ならば,}$$

$$x'^2 - 3y'^2 = 1, 0 \leq y' < y$$

が成立することを示せ.

(2) x, y が $x^2 - 3y^2 = 1$ をみたす自然数ならば, ある自然数 n をとると

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となることを示せ.

(1998 京都大)

(1) $\det A = 1$ より, A^{-1} が存在し.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ とあるから}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x' + 3y' \\ x' + 2y' \end{pmatrix}$$

≥ 4 より, $x'^2 - 3y'^2 = 1$ 上にあるから

$$(2x' + 3y')^2 - 3(x' + 2y')^2 = 1$$

$$4x'^2 + 12x'y' + 9y'^2 - 3x'^2 - 12x'y' - 12y'^2 = 1$$

$$x'^2 - 3y'^2 = 1.$$

また,

$0 \leq y' < y$ を示すには

$$y' = -x' + 2y \text{ より}$$

$0 \leq -x' + 2y < y$ を示せばよい.

$$0 \leq -x' + 2y < y$$

$$\Leftrightarrow y < x' \leq 2y.$$

x, y は正整数より

$$y < x \leq 2y \Leftrightarrow y^2 < x^2 \leq 4y^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 < 1 + 3y^2 \leq 4y^2$$

$$\Leftrightarrow 0 < 1 + 2y^2, 1 \leq y^2.$$

$y \geq 1$ より, 最後の式は常に成立する.

よって示すことが完了.

(2). 同様に考えよう

$$x' > 0 \Leftrightarrow 2x - 3y > 0.$$

$$4x^2 > 9y^2$$

$$4(1 + 3y^2) > 9y^2$$

$$3y^2 > -1.$$

とあるから, $x' > 0$ である.

はじめに (x_0, y_0) をとり (x_0, y_0 は自然数)

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \end{pmatrix} \quad k=1, 2, \dots$$

と格子点列を考える. すると, x_0, y_0, A の各成分

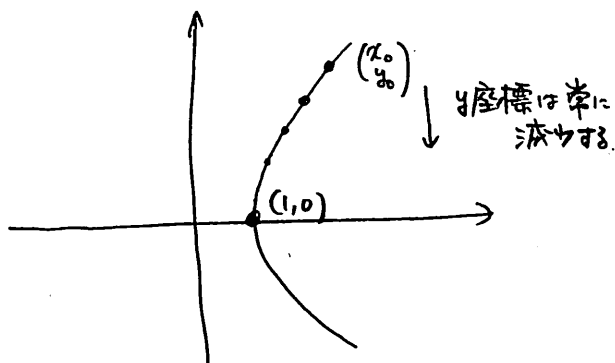
は全て整数なので, (x_k, y_k) は全て格子点

である. また, $0 \leq y' < y$ より, $y_k > y_{k+1} \geq 0$

とあり, y_k は整数値をとる減少数列であるから,

0 以上 y 未満の $y_n = 0$ とする n が存在する.

このとき, $x_n = 1$ とあるから $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とある



行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ によって定まる xy 平面の 1 次変換を f とする。原点以外のある点 P が f によって P 自身に写されるならば、原点を通らない直線 l であって、 l のどの点も f によって l の点に写されるようなものが存在することを証明せよ。

(1982 東大)

原点以外のある点 P が P 自身に写される。
 うつらう。 $\overrightarrow{OP} = \vec{x}$ とする。

$$A\vec{x} = \vec{x}$$

$$(A-E)\vec{x} = 0.$$

よって、原点以外、不動点 P が存在する
 ためには $\det(A-E) = 0$ が
 必要十分。

$$A-E = \begin{pmatrix} a-1 & b \\ c & d-1 \end{pmatrix}$$

$$(a-1)(d-1) - bc = 0.$$

原点を通らない直線 l は、

$$px + qy + 1 = 0. \text{ とする。}$$

ただし、 p と q は同時に 0 にならない。
 する。この直線上の点を (x, y) とすると
 f によってうつたは (x', y') は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

となる。 (x', y') はまた l 直線上に
 ありとす。

$$p(ax+by) + q(cx+dy) + 1 = 0.$$

$$(ap+cq)x + (bp+dq)y + 1 = 0.$$

とある。 (x, y) は $px + qy + 1 = 0$
 上である。つまり、式は一致して
 なければならず

$$ap+cq = p, \quad bp+dq = q.$$

である。これをみたす p, q が存在
 するたは a, b, c, d の
 条件は

$$(a-1)p + cq = 0, \quad bp + (d-1)q = 0$$

$$\text{よって} \begin{pmatrix} a-1 & c \\ b & d-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{よって} \begin{pmatrix} a-1 & c \\ b & d-1 \end{pmatrix} \text{ の逆行列が存在して}$$

なければならぬ。よって

$$(a-1)(d-1) - bc = 0.$$

以上より示された。

※ 原点を通らない直線 l が存在 \iff 原点以外、不動点 P が存在