

(1) 素数の定義を述べよ.

(2) 素数は無数に存在することを証明せよ.

(オリジナル (有名問題))

(1) 1と自身以外に正の約数をもたない、  
1ではない自然数

注) 1を自然数に含むと、素因数分解の一意性  
が成立しない.

(2) 背理法を用いる.

素数が有限個 ( $n$ 個と仮定) しかないと仮定する.

これを  $n$ 個  $p_1, p_2, \dots, p_n$  ( $p_1 < p_2 < \dots < p_n$ ) とし.

次のような数を考える.

$$q = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$$

$q$ が素数でないとき、 $p_n$ より大きい素数があることになり  
矛盾する.

$q$ が素数でないとき、 $q$ は素因数をもつが、 $p_n$ より  
小さい素数で割ると1余りの数で、どの素数でも  
割り切れない。よって、 $q$ は  $p_n$ より大きい素数で  
割り切れることになり、仮定に矛盾する。

以上より、素数は無限に存在する。

参考

2: 最小の素数

$2+1=3$  ← 素数

$2 \cdot 3 + 1 = 7$  ← 素数

$2 \cdot 3 \cdot 7 + 1 = 43$  ← 素数

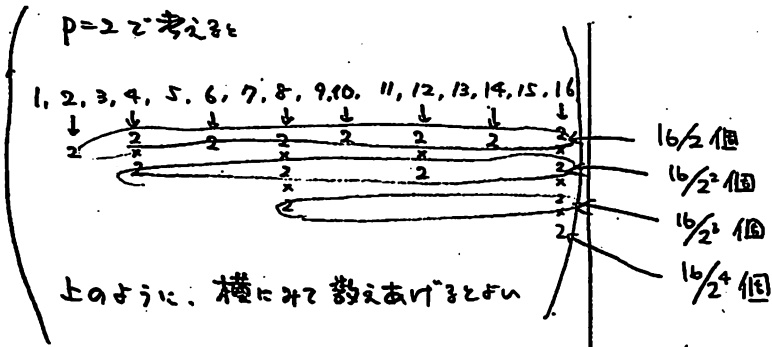
$2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 + 1 = 1807 = 13 \cdot 139$

↑  
合成数

↑ ↑  
素数だが、合計に  
なかつたもの

⊙  $q$ が素数とは限らないことに注意する.

$p$  を素数,  $n$  を正の整数とすると,  $(p^n)!$  は  $p$  で何回割り切れるか.  
 (2009 京大・文理)



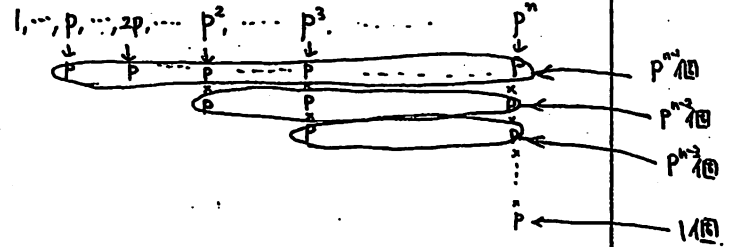
1より  $p^n$  までの間に  $p$  で割り切れる数は

$$\frac{p^n}{p} = p^{n-1} \text{ 個}$$

1より  $p^n$  までの間に  $p^2$  で割り切れる数は

$$\frac{p^n}{p^2} = p^{n-2} \text{ 個}$$

以下、同様に数える。



よって、 $(p^n)!$  を素因数分解したときに

$$1 + p + p^2 + \dots + p^{n-1} \text{ 個ある}$$

よって、

$$\frac{1-p^n}{1-p} \text{ 個}$$

( $n=1$  のときも成り立つ)

(1)  $0 \leq x \leq 2\pi$  の範囲で  $\cos(\pi \cos x) = \frac{1}{2}$  を満たす  $x$  の個数を求めよ.

(2)  $0 \leq x \leq 2\pi$  の範囲で  $\cos(\pi \cos x) = \cos x$  を満たす  $x$  の個数を求めよ.

(2010 東北大)

(1)  $\pi \cos x = t$  とおく.

$$0 \leq x \leq 2\pi \text{ より}$$

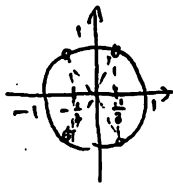
$$-\pi \leq t \leq \pi$$

$$\cos t = \frac{1}{2} \text{ より } t = \pm \frac{\pi}{3}$$

すなわち

$$\cos x = \pm \frac{1}{3}$$

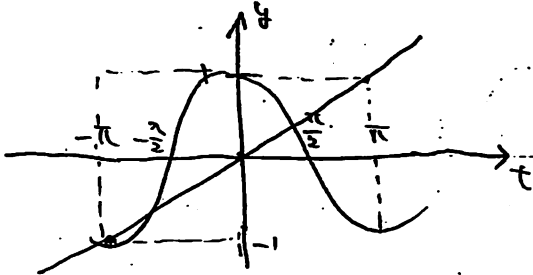
より  $x$  は 4 個



(2) (1) と同様  $t$  とおく.

$$\cos t = \frac{1}{\pi} t \quad (-\pi \leq t \leq \pi)$$

$y = \cos t$ ,  $y = \frac{1}{\pi} t$  のグラフは



$(-\pi, 1)$  のほか 2 点で交わる.

この 2 点は  $-\pi < t < \pi$  の範囲に

あるから  $t$  は 1 つずつあり  $x$  は 2 つずつ

あり

5 個

xyz空間において、不等式

$$0 \leq z \leq 1+x+y-3(x-y)y, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad y \leq x \leq y+1$$

のすべてを満足するx, y, zを座標にもつ点全体がつくる立体の体積を求めよ。

(1982 東大・理)

( $0 \leq y \leq 1$  に注目し、 $y = tz$  と切断する)

$y = t$  とする。

$$t \leq x \leq t+1,$$

$$0 \leq z \leq 1+x+t-3(x-t)t$$

$$\text{より、} 0 \leq z \leq (-3t+1)x + 3t^2 + t + 1.$$

$$x = t \text{ のとき}$$

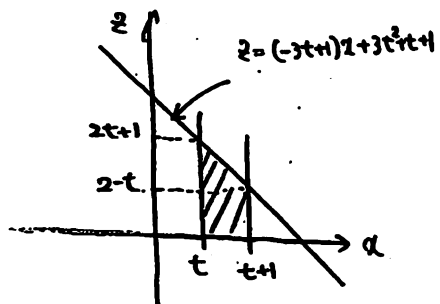
$$z = 2t + 1 > 0.$$

$$x = t+1 \text{ のとき}$$

$$z = (-3t+1)(t+1) + 3t^2 + t + 1$$

$$= -t + 2 > 0$$

より、 $y = tz$  で  $t, t+1$  と  $z$  の切断面は図のようになる



よって、切断面の面積  $A(t)$  は

$$A(t) = \{(2-t) + (2t+1)\} \times 1 \times \frac{1}{2} \\ = \frac{1}{2}(t+3)$$

よって、求める体積  $V$  は

$$V = \int_0^1 A(t) dt = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2}t^2 + 3t \right] \\ = \frac{7}{4}$$

曲線  $y = x^2$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) を  $y$  軸のまわりに 1 回転してできる形の容器に水を満たす。この容器の底に排水口がある。時刻  $t = 0$  に排水口を開けて排水を開始する。時刻  $t$  において容器に残っている水の深さを  $h$ 、体積を  $V$  とする。

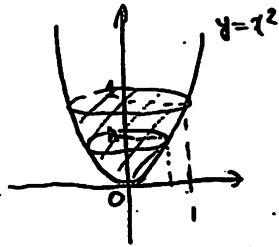
$V$  の変化率  $\frac{dV}{dt}$  は  $\frac{dV}{dt} = -\sqrt{h}$  で与えられている。

(1) 水深  $h$  の変化率  $\frac{dh}{dt}$  を  $h$  を用いて表せ。

(2) 容器内の水を完全に排水するのにかかる時間  $T$  を求めよ。

(2003 北海道大)

(1)



$$\left( \begin{array}{l} h \text{ と } V \text{ の関係を} \\ \text{求める} \\ \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} \\ \text{とわかる} \end{array} \right)$$

$$V = \int_0^h \pi x^2 dy = \pi \int_0^h y dy$$

$$= \pi \cdot \frac{1}{2} h^2$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$= \pi h \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\therefore -\sqrt{h} = \pi h \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{\pi\sqrt{h}}$$

(2) (排水完了)  $\Rightarrow h=0$  と考える

$$\sqrt{h} \frac{dh}{dt} = -\frac{1}{\pi}$$

$$\int \sqrt{h} dh = -\frac{1}{\pi} \int dt$$

$$\frac{2}{3} h^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{\pi} t + C$$

$\therefore t=0$  のとき  $h=1$  より

$$\therefore C = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \frac{2}{3} h^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{\pi} t + \frac{2}{3}$$

$h=0$  となる  $t$  (これを  $t=T$  とする)

$$T = \frac{2}{3}\pi$$