

極限の最終攻略

xy 平面上で原点から傾き $a (a > 0)$ で出発し折れ線上に動く点 P を考える.ただし, 点 P の y 座標はつねに増加し, その値が整数になるごとに動く方向の傾きが s 倍 ($s > 0$) に変化するものとする.

P の描く折れ線が直線 $x = b (b > 0)$ を横切るための a, b, s に関する条件を求めよ.

(1988 東大・理)

$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}, b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$ とするとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n}$ を求めよ.

(1990 東大・理)

xy 平面に 2 つの円

$$C_0 : x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \quad C_1 : (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

をとり, C_2 を x 軸と C_0, C_1 に接する円とする. さらに, $n = 2, 3, \dots$ に対して C_{n+1} を x 軸と C_{n-1}, C_n に接する円で C_{n-2} とは異なるものとする. C_n の半径を r_n, C_n と x 軸の接点を $(x_n, 0)$ として,

$$q_n = \frac{1}{\sqrt{2r_n}}, \quad p_n = q_n x_n$$

とおく.

- (1) q_n は整数であることを示せ.
- (2) p_n は整数で, p_n と q_n は互いに素であることを示せ.
- (3) α を $\alpha = \frac{1}{1+\alpha}$ を満たす正の数として, 不等式

$$|x_{n+1} - \alpha| < \frac{2}{3} |x_n - \alpha|$$

を示し, 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ を求めよ.

(1998 東大・理)