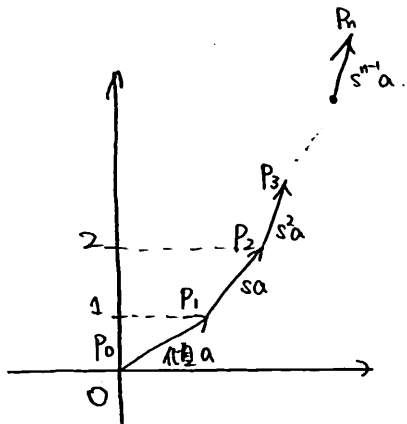


xy 平面上で原点から傾き $a (a > 0)$ で出発し折れ線上に動く点 P を考える。ただし、点 P の y 座標はつねに増加し、その値が整数になるごとに動く方向の傾きが s 倍 ($s > 0$) に変化するものとする。

P の描く折れ線が直線 $x = b (b > 0)$ を横切るための a, b, s に関する条件を求めよ。

(1988 東大・理)



図のように、 y 座標が 0 以上の整数になる点を P_k ($k=0, 1, 2, \dots$) とおく。

$$\overrightarrow{P_0P_1} = \left(\frac{1}{a}, 1\right),$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \left(\frac{1}{as}, 1\right)$$

$$\vdots$$

$$\overrightarrow{P_{k-1}P_k} = \left(\frac{1}{as^{k-1}}, 1\right).$$

よって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP_n} &= \left(\frac{1}{a}, 1\right) + \left(\frac{1}{as}, 1\right) + \dots + \left(\frac{1}{as^{n-1}}, 1\right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{as^k}, n\right) \end{aligned}$$

よって、 $n \neq 1$ のとき

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{as^k} = \frac{1}{a} \left(1 - \left(\frac{1}{s}\right)^n\right) / \left(1 - \frac{1}{s}\right)$$

$n=1$ のとき

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{as^k} = \frac{n}{a}$$

よって、 $0 < n \leq 1$ のとき

$\overrightarrow{OP_n}$ の x 座標は ∞ となる。

$$\begin{aligned} 0 < n < 1 \text{ のとき} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{as^k} &= \frac{1}{a} \\ &= \frac{n}{a(1-n)} \end{aligned}$$

よって、

$x=b$ を横切るときは、 $0 < n \leq 1$ のとき a, b は任意の正の数

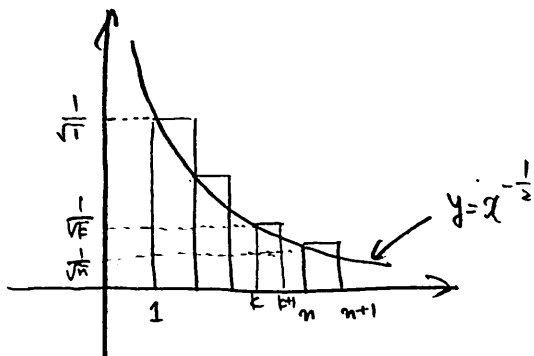
$$0 < n < 1 \text{ のとき、} \quad 0 < b < \frac{n}{(n-1)a}$$

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \text{ とするとき, } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} \text{ を求めよ.}$$

(1990 東大・理)

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ については、 $\sum_{k=1}^m \frac{1}{k}$ が発散することの証明の要領に、グラフで説明するとよい。後半は、はみうちの「イージ」でせよ。うまくいく。

$y = x^{-\frac{1}{2}}$ のグラフに注目。
 $y' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} < 0$, $y'' = \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}} > 0$
 かつ、 $x > 0$ に注目。単調減少で下に凸である。



上のグラフの面積を比較することにより、

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} > \int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$\therefore \int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_1^{n+1} = 2\sqrt{n+1} - 2.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} (2\sqrt{n+1} - 2) = \infty$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty.$$

$$\frac{1}{\sqrt{2k+2}} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}} < \frac{1}{\sqrt{2k}}$$

4)

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{k+1}} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}} < \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^m \frac{1}{\sqrt{k+1}} < \sum_{k=1}^m \frac{1}{\sqrt{2k+1}} < \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^m \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{\sqrt{k}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{m+1}}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^m \frac{1}{\sqrt{k}} = a_m \text{ かつ}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (a_m - 1 + \frac{1}{\sqrt{m+1}}) < b_m < \frac{1}{\sqrt{2}} a_m$$

各 a_n でせよ。

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (1 - \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_n} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}}) < \frac{b_n}{a_n} < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ かつ (はみうちの原理から)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

xy 平面に2つの円

$$C_0: x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \quad C_1: (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

をとり, C_2 を x 軸と C_0, C_1 に接する円とする。さらに, $n = 2, 3, \dots$ に対して C_{n+1} を x 軸と C_{n-1}, C_n に接する円で C_{n-2} とは異なるものとする。 C_n の半径を r_n , C_n と x 軸の接点を $(x_n, 0)$ として,

$$q_n = \frac{1}{\sqrt{2r_n}}, \quad p_n = q_n x_n$$

とおく。

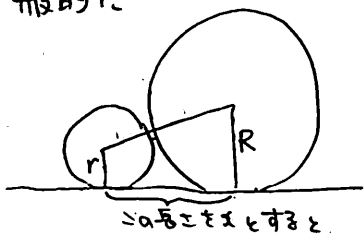
- (1) q_n は整数であることを示せ。
- (2) p_n は整数で, p_n と q_n は互いに素であることを示せ。
- (3) α を $\alpha = \frac{1}{1+\alpha}$ を満たす正の数として, 不等式

$$|x_{n+1} - \alpha| < \frac{2}{3} |x_n - \alpha|$$

を示し, 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ を求めよ。

(1998 東大・理)

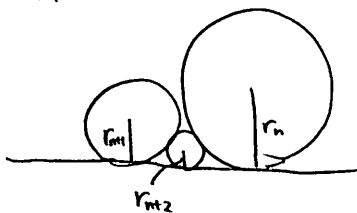
(1) 一般的に



$$(R+r)^2 = (R-r)^2 + r^2$$

$$\text{よ) } r = \sqrt{4Rr} \text{ である。}$$

(1) p_n, q_n



$$\text{よ) } \sqrt{4r_n r_{m2}} + \sqrt{4r_{m1} r_{m2}} = \sqrt{4r_n r_{m1}}$$

$$\sqrt{2r_n} = \frac{1}{q_n} \text{ よ) }.$$

$$\frac{1}{q_n} \cdot \frac{1}{q_{m2}} + \frac{1}{q_{m1}} \cdot \frac{1}{q_{m2}} = \frac{1}{q_n} \cdot \frac{1}{q_{m1}}$$

$$\therefore q_{m1} + q_n = q_{m2}$$

$$q_0 = q_1 = \frac{1}{\sqrt{2r_0}} = 1 \text{ よ) }.$$

帰納的に q_n は整数になる。

$$(2) x_n - x_{n+1} = (-1)^{n+1} \sqrt{4r_n r_{n+1}}, \quad \sqrt{2r_n} = \frac{1}{q_n}$$

$$\begin{aligned} \text{よ) } x_{n+1} - x_n &= (-1)^n \sqrt{4r_n r_{n+1}} \\ &= (-1)^n \frac{1}{q_n} \cdot \frac{1}{q_{n+1}} \end{aligned}$$

$$\text{また } p_n = q_n x_n \text{ よ) }.$$

$$x_{n+1} q_{n+1} q_n - x_n q_n q_{n+1} = (-1)^n$$

$$p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n$$

$$p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n$$

$$+ \frac{p_{n+2} q_{n+1} - p_{n+1} q_{n+2} = (-1)^{n+1}}{}$$

$$p_{n+1} q_n + p_{n+2} q_{n+1} - p_n q_{n+1} - p_{n+1} q_{n+2} = 0$$

$q_{n+1} + q_n \neq 0$

q_n は増加数列かつ $q_n \neq 0$ である。

よ) $q_{n+1} \neq 0$ である。

$$p_{n+2} - p_n - p_{n+1} = 0$$

$$p_{n+2} = p_{n+1} + p_n$$

$$\therefore p_0 = q_0 x_0 = 0, \quad p_1 = q_1 x_1 = 1$$

よ) q_n 同様, 帰納的に整数になる。

また、途中の式

$$p_{n+1}g_n - p_n g_{n+1} = (-1)^n$$

よって、 p_n と g_n の最小公倍数を d とすると
左辺は d の因数分解できるが、右辺は
 $(-1)^n$ であり、 $d=1$ である。

よって、 p_n, g_n は互いに素である。

$$(3) g_{n+2} = g_{n+1} + g_n \text{ かつ}$$

$$\{g_n\}: 1, 1, 2, 3, 5, \dots$$

$$p_{n+2} = p_{n+1} + p_n \text{ かつ}$$

$$\{p_n\}: 0, 1, 1, 2, 3, \dots$$

かつ

$$g_n = p_{n+1}$$

が成り立ち、よって

従って

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{p_{n+1}}{g_{n+1}} \\ &= \frac{p_{n+1}}{p_{n+2}} \\ &= \frac{p_{n+1}}{p_{n+1} + p_n} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{p_n}{p_{n+1}}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{p_n}{g_n}} \\ &= \frac{1}{1 + x_n} \end{aligned}$$

$$\text{かつ} \quad x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n} \text{ が成り立つ}$$

$$\Rightarrow \text{a 式} \text{ と } \alpha = \frac{1}{1+\alpha} \text{ を得る。}$$

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - \alpha| &= \left| \frac{1}{1+x_n} - \frac{1}{1+\alpha} \right| \\ &= \left| \frac{1+\alpha - 1-x_n}{(1+x_n)(1+\alpha)} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left| \frac{x_n - \alpha}{(1+x_n)(1+\alpha)} \right| \\ &= \frac{|\alpha|}{|1+x_n|} \cdot |x_n - \alpha| \end{aligned}$$

$$\text{よって } \frac{1}{1+\alpha} = \alpha \text{ と } \alpha < 1, \alpha > 0 \text{ かつ}$$

$$\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < \frac{2}{3}$$

$$x_n > 0 \text{ かつ } |1+x_n| > 1 \text{ かつ}$$

$$\frac{|\alpha|}{|1+x_n|} = \frac{\alpha}{1+x_n} < \frac{2}{3}, \text{ かつ } x_n \neq \alpha \text{ かつ}$$

$$|x_{n+1} - \alpha| < \frac{2}{3} |x_n - \alpha|$$

$$< \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} |x_0 - \alpha|$$

$$\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty \text{ とき})$$

$$\text{よって } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

* 上の式は、フィボナッチ数列、隣接する項の比が $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ となることを示す。