

θ が0から 2π まで変化するとき、点 $P(\theta) = (2\cos\theta - \cos 2\theta, 2\sin\theta - \sin 2\theta)$ の描く曲線を考える。

(1) この曲線の全長 L を求めよ。

(2) この曲線の $0 \leq \theta \leq \theta_n$ の部分の長さが $\frac{L}{n}$ となるように θ_n を定めるとき、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}\theta_n$ を求めよ。

(1994 京都大)

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{(-2\sin\theta + 2\sin 2\theta)^2 + (2\cos\theta - 2\cos 2\theta)^2} \\
 & = 2\sqrt{2} \sqrt{1 - \sin\theta\sin 2\theta - \cos\theta\cos 2\theta} \\
 & = 2\sqrt{2} \sqrt{1 - 2\sin^2\theta\cos\theta - \cos\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)} \\
 & = 2\sqrt{2} \sqrt{1 - \sin^2\theta\cos\theta - \cos^3\theta} \\
 & = 2\sqrt{2} \sqrt{1 - \cos\theta} \\
 & = 2\sqrt{2} \sqrt{2\sin^2\frac{\theta}{2}} \\
 & = 4\sin\frac{\theta}{2}.
 \end{aligned}$$

$$(\because 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ かつ } \sin\frac{\theta}{2} \geq 0)$$

$$\begin{aligned}
 \text{よって } L &= 4 \int_0^{2\pi} \sin\frac{\theta}{2} d\theta \\
 &= 4 \left[-2\cos\frac{\theta}{2} \right]_0^{2\pi} = 16.
 \end{aligned}$$

(2) $0 \leq \theta \leq \theta_n$ の部分の長さを L_n とする。

$$\begin{aligned}
 L_n &= 4 \int_0^{\theta_n} \sin\frac{\theta}{2} d\theta \\
 &= 4 \left[-2\cos\frac{\theta}{2} \right]_0^{\theta_n} = 8 \left(1 - \cos\frac{\theta_n}{2} \right)
 \end{aligned}$$

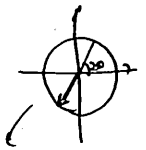
条件より

$$\begin{aligned}
 8 \left(1 - \cos\frac{\theta_n}{2} \right) &= \frac{16}{n} \\
 n &= \frac{2}{1 - \cos\frac{\theta_n}{2}} \\
 &= \frac{2}{2\sin^2\frac{\theta_n}{4}} \\
 &= \frac{1}{\sin^2\frac{\theta_n}{4}}
 \end{aligned}$$

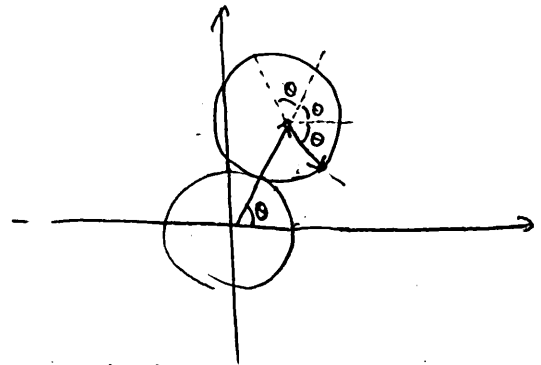
$$\begin{aligned}
 \text{よって } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}\theta_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sin\frac{\theta_n}{4}} \cdot \theta_n \quad \left(\sin\frac{\theta_n}{4} > 0 \text{ かつ } \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \cdot \frac{\theta_n}{\sin\frac{\theta_n}{4}}
 \end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$ かつ $\theta_n \rightarrow 0$ かつ

よって極限値は4



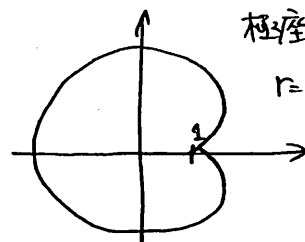
$$\begin{aligned}
 P(\theta) &= 2(\cos\theta, \sin\theta) + (-\cos 2\theta, -\sin 2\theta) \\
 &= 2(\cos\theta, \sin\theta) + (\cos(2\theta - \pi), \sin(2\theta - \pi))
 \end{aligned}$$



よって軌跡はカーディオイドになる

極座標で

$$r = a(1 + \cos\theta)$$



t が実数で $-1 \leq t \leq 1$ を満たすとき、直線 $2tx + 3y\sqrt{1-t^2} - 12 = 0$ が通り得ない範囲を図示せよ。
(1986 関西医大・改)

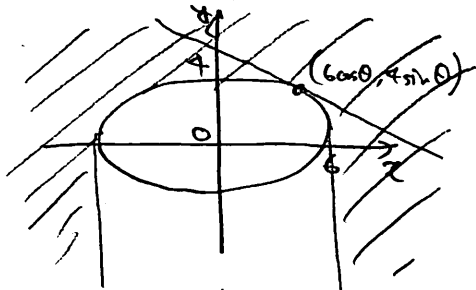
$t = \cos \theta$ とおく。
 $\sqrt{1-t^2} = \sin \theta$ とおき
 $-1 \leq \cos \theta \leq 1, 0 \leq \sin \theta \leq 1$ より
 $0 \leq \theta \leq \pi$.

よって、
 $2 \cos \theta \cdot x + 3 \sin \theta y - 12 = 0$
 $\frac{\cos \theta \cdot x}{6} + \frac{\sin \theta y}{4} = 1$
 $\frac{6 \cos \theta \cdot x}{6^2} + \frac{4 \sin \theta \cdot y}{4^2} = 1$

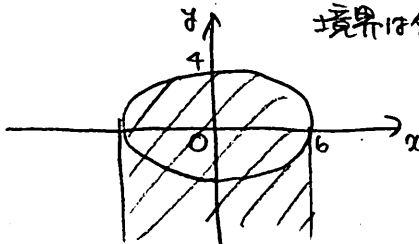
よって、この式は、た円

$$\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$

の $(6 \cos \theta, 4 \sin \theta)$ における接線
を表している。 $0 \leq \theta \leq \pi$ より、通過領域
は、図の斜線部分



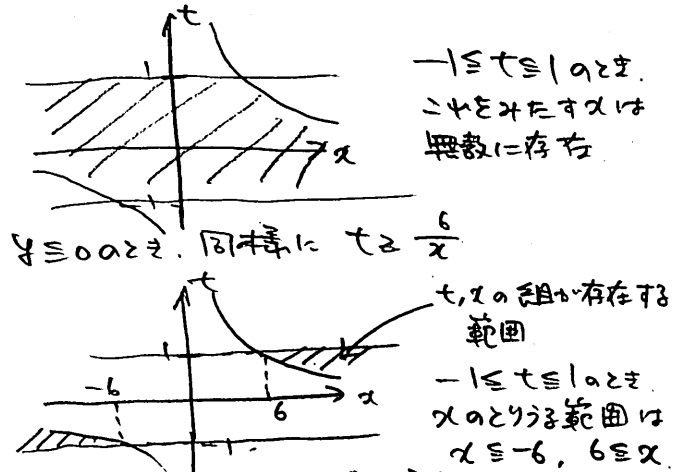
よって、求める領域は図の斜線部分
境界は含まれる



(別) 円周角を考慮する。

$$2tx + 12 = -3y\sqrt{1-t^2}$$

$y \geq 0$ とき、 $2tx - 12 \leq 0$ より
 $t \leq \frac{6}{x}$



よって、 $y \geq 0$ とき x は全実数
 $y \leq 0$ とき $x \leq -6, 6 \leq x$... ①
以上を準備として、与式を2乗して整理すると
 $(4x^2 + 9y^2)t^2 - 48xt + 144 - 9y^2 = 0$
 \therefore $-1 \leq t \leq 1$ なる解をもつ条件は $f(t) = f(t)$ と
 t

判別式 $D/4 \geq 0$... ②
 $-1 \leq$ (軸) ≤ 1 ... ③
 $f(-1) \geq 0, f(1) \geq 0$... ④

② より $(24x)^2 - (4x^2 + 9y^2)(144 - 9y^2) \geq 0$
 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} \geq 1$... ②

③ より $-1 \leq \frac{24x}{4x^2 + 9y^2} \leq 1$
 $\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{y^2}{4} \geq 1$... ③ $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{y^2}{4} \geq 1$... ③'

④ より $f(-1) \geq 0$
 $(x+6)^2 \geq 0$ (これは常に成り立つ)
 $f(1) \geq 0$
 $(x-6)^2 \geq 0$ (これは常に成り立つ)

