

<双曲線関数(1) >

$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

微分すると、お互いに入れ替わった関数、
 符号は変わります。sin x と cos x を思い出すようにも
 ことができます。对吧。

$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = 1$$

右辺に1になる。=47. sin x, cos x と 対称相似する
 ことに気が付く。对吧。

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

とす。以上のことをかえ。

$$(\cosh x)' = \sinh x, \quad (\sinh x)' = \cosh x$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

とす。对吧。=47 双曲線関数とす。

三角関数と同じと 加法定理、和積の公式も成り立つ。
 三角関数の公式で、cos x ⇒ cosh x, sin x ⇒ sinh x
 とす。得ることは知らず。

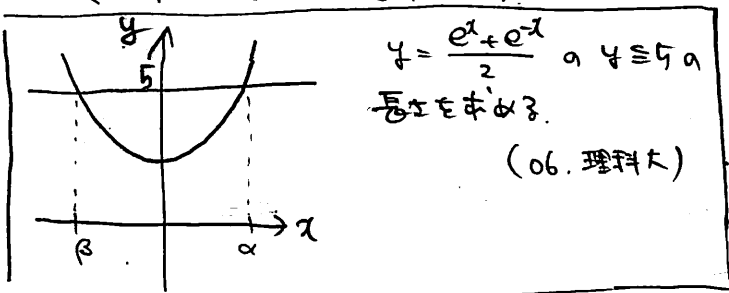
$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

↓

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cdot \cosh y - (\sinh x \cdot (-\sinh y))$$

$$= \cosh x \cdot \cosh y + \sinh x \cdot \sinh y.$$

< 1 + sinh^2 x = cosh^2 x の証明 >



y=5 との交点のx座標をtとす。

$$5 = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \text{ より } e^t + e^{-t} = 10$$

$$\text{=47 対称より } e^t = 5 \pm 2\sqrt{6}$$

求める値は $e^\alpha = 5 + 2\sqrt{6}$, $e^\beta = 5 - 2\sqrt{6}$ とす。

$$\int_\beta^\alpha \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_\beta^\alpha \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2} dx$$

$$= \int_\beta^\alpha \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx$$

$$= \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right]_\beta^\alpha$$

$$= \frac{1}{2} (e^\alpha - e^{-\alpha} - e^\beta + e^{-\beta})$$

$$= \frac{1}{2} (e^\alpha - e^\beta + \frac{e^\alpha - e^\beta}{e^\alpha e^\beta})$$

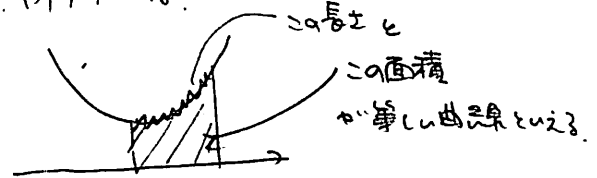
$$= \frac{1}{2} (4\sqrt{6} + 4\sqrt{6})$$

$$= 4\sqrt{6}$$

※ の表す、对吧。

$$\sqrt{1 + \sinh^2 x} = \cosh x \quad \alpha < \beta$$

对吧。+1+1-1 は。



$$\int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad \int_0^\pi \sqrt{1+x^2} dx \text{ とす}$$

$$\int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \text{ とす } x = \sin \theta \text{ とす}$$

$$\sqrt{1-\sin^2 \alpha} = |\cos \alpha| \text{ とす}$$

$$\sqrt{1+x^2} \text{ とす } \sqrt{1+\sinh^2 x} = |\cosh x| \text{ とす}$$

$$x = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \text{ とす}$$

$$dx = \frac{e^t + e^{-t}}{2} dt$$

$$\pi = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \text{ とす } t = \log(\pi + \sqrt{\pi^2 + 1})$$

$$(e^t)^2 - 2\pi e^t - 1 = 0 \text{ より } e^t = \pi \pm \sqrt{\pi^2 + 1}$$

直線条件が2つある

47.

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$= \int_0^{\log(\pi+\sqrt{1+\pi^2})} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2}} \cdot \frac{e^t+e^{-t}}{2} dt$$

$\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2t}-2+e^{-2t}}{4}$

$$= \int_0^{\log(\pi+\sqrt{1+\pi^2})} \frac{1}{\frac{e^t+e^{-t}}{2}} \cdot \frac{e^t+e^{-t}}{2} dt$$

$$= [t]_0^{\log(\pi+\sqrt{1+\pi^2})}$$

$$= \log(\pi+\sqrt{1+\pi^2})$$

$$\int_0^{\pi} \sqrt{1+x^2} dx$$

$$= [x \cdot \sqrt{1+x^2}]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} x \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$= \pi\sqrt{1+\pi^2} - \int_0^{\pi} \frac{1+x^2-1}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

前問

$$= \pi\sqrt{1+\pi^2} - \int_0^{\pi} \sqrt{1+x^2} dx + \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

47)

$$\int_0^{\pi} \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \left\{ \pi\sqrt{1+\pi^2} + \log(\pi+\sqrt{1+\pi^2}) \right\}$$

48. 同解法.

$$\pi = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \text{ を解く (過程 47)}$$

$$x = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \text{ を変形すると}$$

$$e^t = x + \sqrt{1+x^2} \text{ を得る}$$

ここで $u = e^t$ とおくと

$$u = x + \sqrt{1+x^2} \text{ と置換}$$

(27) + (2)

(参考) 57問 $t = \log(x + \sqrt{1+x^2})$ より
 $y = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ の逆関数 $y = \log(x + \sqrt{1+x^2})$

$$du = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) dx$$

$$du = \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

x	$0 \rightarrow \pi$	
u	$1 \rightarrow \pi + \sqrt{1+\pi^2}$	(47)

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_1^{\pi+\sqrt{1+\pi^2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}+x} du$$

$$= \int_1^{\pi+\sqrt{1+\pi^2}} \frac{1}{u} du$$

$$= [\log|u|]_1^{\pi+\sqrt{1+\pi^2}}$$

$$= \log(\pi + \sqrt{1+\pi^2})$$

(この答えは (27))