

斜回転体の体積

【例題】

曲線 $y = x^2$ と直線 $y = x$ とで囲まれた部分を直線 $y = x$ のまわりに1回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

(東京女子大など、有名問題)

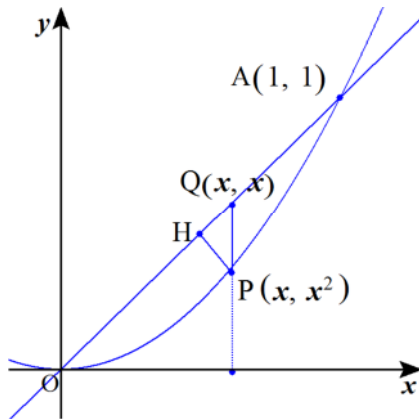
斜回転体の解き方は何通りかあるが、有名な2通りを載せる。

OA方向に軸を持っていき、OHの長さを改めて t としたあと t で積分するのがポイント。

$$\pi \int_0^{\sqrt{2}} PH^2 dt$$

の式を目標にするとよい。

【解答】



$$PQ = x - x^2, \quad PH = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - x^2)$$

である。また、 $OH = t$ とおくと、

$$\begin{aligned} t &= OQ - QH \\ &= \sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}}(x - x^2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x \end{aligned}$$

より

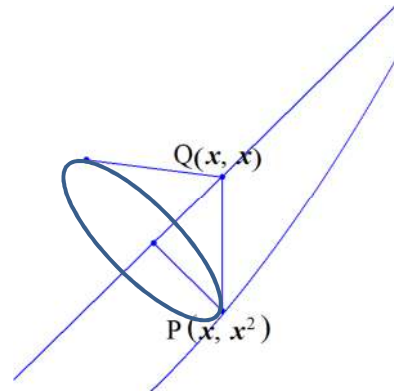
$$dt = \left(\sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) dx$$

なので

$$\begin{aligned} \pi \int_0^{\sqrt{2}} PH^2 dt &= \pi \int_0^1 \frac{1}{2}(x - x^2)^2 \cdot \left(\sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) dx \\ &= \dots = \frac{\sqrt{2}}{60} \pi \end{aligned}$$

※次の解答は、とんがりコーン型のをどんどん重ねていったものとする発想である。バームクーヘン同様、記述には若干の注意が必要。

【別解】



この円すい型（側面のみ、厚さ Δx ）のものを足し合わせればよい。

この体積は側面積 $\times \Delta x$ に近似されるので、

$$\begin{aligned} &2\pi \times PH \times PQ \times \frac{1}{2} \times \Delta x \\ &= \pi \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(x - x^2)^2 \times \Delta x \end{aligned}$$

よって $[0, 1]$ を n 等分し、 x 座標を順に

x_0, x_1, \dots, x_{n-1} またその区間を Δx とすると

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \pi \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(x - x^2)^2 \Delta x \\ &= \int_0^1 \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot (x - x^2)^2 dx \\ &= \dots = \frac{\sqrt{2}}{60} \pi \end{aligned}$$

【1】

a は正の定数とする。放物線 $y = ax^2$ と直線 $y = ax$ で囲まれる図形を、直線 $y = ax$ の周りに1回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

(2005 大分大・医)

【解答】 計算は各自で。

$$V = \frac{\pi a^2}{30\sqrt{1+a^2}}$$