

対称性のある定積分

【問題】

(1) $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$ を $x = \pi - t$ とおいて置換積分で求めよ.

(2) $f(x)$ が区間 $[-1, 1]$ で連続であるとき、次の等式が成り立つことを証明せよ.

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) \, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) \, dx$$

(3) (2) の等式を用いて $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{3 + \sin^2 x} \, dx$ を求めよ.

(お茶の水女子大)

(2) の証明は、(1) から $x = \pi - t$ とおけばいいことが予想できるが、ノーヒントでできるようにならなければならない。基本的に、両辺に $\sin x$ もしくは両辺に $\cos x$ のある定積分の等式の証明は $x = \pi - t$ と置換する。なぜなら、

$$\sin(\pi - t) = \sin t, \quad \cos(\pi - t) = -\cos t$$

が成り立つからである。一方に $\sin x$ 、もう一方に $\cos x$ があるときは、 $x = \frac{\pi}{2} - t$ とおく。なぜなら、

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$$

が成り立つからである。練習として、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$$

を証明してみよ。(Wallis の公式は、この式により $\cos^n x$ でも示せることになる。)

(1) $dx = -dt$, $x: 0 \rightarrow \pi$ のとき $t: \pi \rightarrow 0$ より

$$\int_0^{\pi} x \sin x \, dx = \int_{\pi}^0 (\pi - t) \sin(\pi - t) (-dt)$$

$$= \int_0^{\pi} (\pi - t) \sin t \, dt$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \sin t \, dt - \int_0^{\pi} t \sin t \, dt$$

$$= 2\pi - \int_0^{\pi} t \sin t \, dt$$

$$\int_0^{\pi} x \sin x \, dx = I \text{ とおくと}$$

$$I = 2\pi - I$$

$$I = \pi$$

(2) $x = \pi - t$ とおく。(1) と同様に

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) \, dx = \int_{\pi}^0 (\pi - t) f(\sin(\pi - t)) (-dt)$$

$$= \int_0^{\pi} (\pi - t) f(\sin t) \, dt$$

$$= \pi \int_0^{\pi} f(\sin t) \, dt - \int_0^{\pi} t f(\sin t) \, dt$$

$$\int_0^{\pi} t f(\sin t) \, dt = \int_0^{\pi} x f(\sin x) \, dx,$$

$$\int_0^{\pi} f(\sin t) \, dt = \int_0^{\pi} f(\sin x) \, dx \text{ より}$$

$$2 \int_0^{\pi} x f(\sin x) \, dx = \pi \int_0^{\pi} f(\sin x) \, dx$$

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) \, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) \, dx$$

(3) $f(x) = \frac{x}{3 + x^2}$ とおく。(2) より

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{3 + \sin^2 x} \, dx$$

$$= \int_0^{\pi} x f(\sin x) \, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) \, dx$$

ここで、

$$\int_0^{\pi} f(\sin x) \, dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{3 + \sin^2 x} \, dx$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{4 - \cos^2 x} dx$$

$\cos x = t$ とおく. $-\sin x dx = dt$ より

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{4 - \cos^2 x} dx = \int_1^{-1} \frac{-1}{4 - t^2} dt$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{1}{(2+t)(2-t)} dt$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2+t} + \frac{1}{2-t} \right) dt$$

$$= \frac{1}{4} [\log|2+t| - \log|2-t|]_{-1}^1$$

$$= \frac{1}{4} \left[\log \left| \frac{2+t}{2-t} \right| \right]_{-1}^1$$

$$= \frac{1}{4} \left(\log 3 - \log \frac{1}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \log 3$$

よって, $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{3 + \sin^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \log 3 = \frac{\pi}{4} \log 3$

【1】

(1) 連続関数 $f(x)$ が, すべての実数 x について $f(\pi - x) = f(x)$ を満たすとき,

$$\int_0^{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) f(x) dx = 0$$

が成り立つことを証明せよ.

(2) $\int_0^{\pi} \frac{x \sin^3 x}{4 - \cos^2 x} dx$ を求めよ.

(静岡大)

$f(\pi - x) = f(x)$ を使うには…図を書くと, $\sin x$ などはそれが成り立っている. また, $\sin x$ は $x = \frac{\pi}{2}$ に関して対称であるので…と考えるとだんだん問題文のニュアンスが分かってくる. しかし, 図やイメージだけできっちり説明するのは難しそう.

(一応できるが) そこでとりあえず, $\pi - x = t$ と置換すると与式の $f(x)$ が $f(\pi - t)$ となり, 条件式を使うことができる.

【解答】

(1) $\pi - x = t$ とおく. $-dx = dt$ より, 与式の左辺を I とおくと,

$$I = \int_0^{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) f(x) dx$$

$$= \int_{\pi}^0 \left(\frac{\pi}{2} - t \right) f(\pi - t) (-dt)$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - t \right) f(t) dt$$

$$= -I$$

よって $I = 0$

(2) $f(x) = \frac{\sin^3 x}{4 - \cos^2 x}$ とする.

$$f(\pi - x) = \frac{\sin^3(\pi - x)}{4 - \cos^2(\pi - x)}$$

$$= \frac{\sin^3 x}{4 - \cos^2 x}$$

$$= f(x)$$

より, (1)から $\int_0^{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) f(x) dx = 0$

$$\text{よって, } \int_0^{\pi} x f(x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(x) dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos^2 x}{4 - \cos^2 x} \cdot \sin x dx \dots *$$

$\cos x = u$ とおくと, $-\sin x dx = du$

より, 偶関数の性質をつかうと,

$$* = \frac{\pi}{2} \int_1^{-1} \frac{1 - u^2}{4 - u^2} \cdot (-du)$$

$$= \pi \int_0^1 \frac{1 - u^2}{4 - u^2} du$$

$$= \pi \int_0^1 \left(1 - \frac{3}{4 - u^2} \right) du$$

$$= \pi \int_0^1 \left\{ 1 - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{u+2} - \frac{1}{u-2} \right) \right\} du$$

$$= \pi \left[u - \frac{3}{4} \log \left| \frac{u+2}{u-2} \right| \right]_0^1$$

$$= \pi \left(1 - \frac{3}{4} \log 3 \right)$$