

対称性のある定積分

【問題】

(1) $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$ を $x = \pi - t$ とおいて置換積分で求めよ.

(2) $f(x)$ が区間 $[-1, 1]$ で連続であるとき, 次の等式が成り立つことを証明せよ.

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) \, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) \, dx$$

(3) (2) の等式を用いて $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{3 + \sin^2 x} \, dx$ を求めよ.

(お茶の水女子大)

練習

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$$

を証明せよ.

【1】

(1) 連続関数 $f(x)$ が, すべての実数 x について $f(\pi - x) = f(x)$ を満たすとき,

$$\int_0^{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) f(x) \, dx = 0$$

が成り立つことを証明せよ.

(2) $\int_0^{\pi} \frac{x \sin^3 x}{4 - \cos^2 x} \, dx$ を求めよ.

(静岡大)