

< 互いに素 >

連続する 2 つの自然数はどれをとっても互いに素であることを示せ.

互いに素を示すには、最大公約数が 1 であることを示せばよい.

【解答】

2 つの自然数を $n, n + 1$ とする. また, これらの最大公約数を $d (d > 0)$ とすると, 正の整数 a, b を用いて,

$$n = ad, n + 1 = bd$$

とかける. $(n + 1) - n = 1$ より, $ad - bd = 1$ なので,

$$(a - b)d = 1$$

$d, a - d$ は共に整数で, $d > 0$ より, $d = 1$

① 2 つの整数 a, b に対し, 次の関係が成り立つことを示せ.

(1) 「 a, b が互いに素」 \rightarrow 「 $a + b$ と ab は互いに素」

(2) 「 $a + b$ と ab は互いに素」 \rightarrow 「 a, b が互いに素」

「互いに素」の証明は、最大公約数が 1 であることを示せばよい. 具体的に最大公約数を d としたとき, $d = 1$ にならざるを得ないことをいう.

【解答】

(1) $a + b$ と ab が互いに素でないとする. つまり,

$$a + b = md, ab = nd$$

(n, m は整数, d は $d > 1$ を満たす自然数)

と表せるとする. 第 2 式より, a, b の少なくとも一方は d の倍数だから, a が d の倍数であるとする. $a = kd$ (k は整数) と表せる. これを第 1 式に代入すると, $a'd + b = nd$ つまり,

$$b = (n - k)d$$

と表せる. $n - k$ は整数であるので, b も d を約数にもつ. $d > 1$ であるので, a, b が互いに素であることに矛盾する. よって, 背理法により示された.

(2) a, b が互いに素でないとする. つまり,

$$a = a'd', b = b'd' (a', b' \text{ は整数, } d' \text{ は } d' > 1 \text{ を満たす自然数})$$

と表せるとする. このとき,

$$a + b = a'd' + b'd' = (a' + b')d'$$

$$ab = a'b'd'^2$$

であるから, $a + d, ab$ ともに d' を約数にもち, $d' > 1$ より, 互いに素であることに矛盾する. よって, 背理法により示された. この結果は時に威力を発揮するので, 知っておいた方がよい.

② 方程式 $x^3 - 3x - 1 = 0$ の解 α について次のことがらを示せ.

(1) α は整数ではない.

(2) α は有理数ではない.

(小樽商科大)

【解答】

(1) 方程式 $x^3 - 3x - 1 = 0$ が整数の解 α をもつとする. つまり,

$$\alpha = n \quad (n \text{ は整数})$$

を解にもつとして, 矛盾を示す. $\alpha = n$ を代入すると,

$$n^3 - 3n - 1 = 0$$

これを变形して,

$$n(n^2 - 3) = 1$$

$n, n^2 - 3$ は整数なので, n は 1 か -1 である. ところが, この 2 つは $x^3 - 3x - 1 = 0$ を満たさないので矛盾する. したがって, 整数解をもたない.

(2) 方程式 $x^3 - 3x - 1 = 0$ が有理数の解 α をもつとする. つまり,

$$\alpha = \frac{p}{q} \quad (p \text{ と } q \text{ は互いに素な整数. ただし, } q \neq 0)$$

を解にもつとして, 矛盾を示す.

$$\alpha = \frac{p}{q} \text{ を } x^3 - 3x - 1 = 0 \text{ に代入して,}$$

$$\left(\frac{p}{q}\right)^3 - 3\left(\frac{p}{q}\right) - 1 = 0$$

両辺に q^3 をかけて, 分母を払うと,

$$p^3 - 3pq^2 - q^3 = 0$$

これを变形して,

$$p^3 = q(3pq + q^2)$$

よって, p^3 は q の倍数である. しかし, p, q は互いに素であるから, $q = 1$. このとき $\alpha = p$ となり, 整数解をもつことになる. これは, (1) に矛盾. よって, 有理数を解にもたない

【参考】 a と b が互いに素であるとき, 次の定理が成り立つ.

- (1) $ax + by = 1$ となる整数 x, y が存在する.
- (2) a' と b' の最大公約数が d であるとき, $a'x + b'y = d$ となる整数 x, y が存在する. (ベズーの等式)
- (3) 任意の整数は, 互いに素な自然数 a, b と整数 x, y を用いて $ax + by$ の形で表すことができる.

【解説】

(1) がわかれば, (2), (3) はほぼ明らか. なぜなら, (1) を d 倍すれば (2) が示せ, (3) は (1) を n 倍して nx と ny を改めて, x, y だと思えば, 任意の自然数 n を作る事ができる.

具体的な例でいうと, 2 と 3 は互いに素なので, $2x + 3y = 1$ をみたく整数 x, y は存在し, ($x = 2, y = -1$ など) それを n 倍して, nx と ny を改めて, x, y だと思えば, 任意の自然数 n を作る事ができる.

逆に, $3x + 6y = 1$ となるような整数 x, y は存在しない. なぜなら, 左辺は 3 の倍数, 右辺は 3 の倍数でないからである. しかしながら, $3x + 6y = 3$ なら, x, y をうまく選べば等式を成り立たせることができる. (3 で割れば, (1) と同じ.)

となると, (1) の証明が気になるところだが, これは次の補題を示すとよい.

【補題】 a と b が互いに素であるとき, $a, 2a, 3a, \dots, ba$ の整数を b で割った余りは全て異なる.

【証明】

ia, ja ($1 \leq i < j \leq b$) を b で割った余りがともに r であったとする. $ja = bq_1 + r, ia = bq_2 + r$ とすると,

$$ja - ia = (bq_1 + r) - (bq_2 + r) = b(q_1 - q_2)$$

より, これは b で割り切れる. 一方,

$$ja - ia = (j - i)a$$

であり, $0 < j - i < b$ なので, $j - i$ と b は互いに素. よって, a は b で割り切れることになるが, これは互いに素であることに矛盾する. よって示された.

以上より, b で割った余りは $0 \sim b - 1$ の b 通りが 1 回ずつ現れることになるので, ちょうど 1 回, 余りが 1 になるものが存在することになる. 例えば, $a = 3, b = 5$ とすると, $1 \times 3, 2 \times$

$3, 3 \times 4, 4 \times 3, 5 \times 3$ を 5 で割った余りはそれぞれ, 3, 1, 4, 2, 0 となり, 0 ~ 4 までの数がちょうど 1 回ずつ現れることになる.

【(1) の証明】

補題より, 整数 x に対し, xa を b で割ると商が q , 余りが 1 になるようにできるので,

$$xa = bq + 1$$

と表せる. q を $-y$ におきかえると,

$$ax + by = 1$$