

とことん極限

組 番 氏名

1 次の極限を求めよ。ただし、(8)のaは定数とする。

(1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x + 1}{2x^3 - 3x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{2 - \frac{3}{x}}$$
  

$$= \frac{1}{2}$$

(2)  $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{x}{|x|}$

$$= -1$$
  
 (x < 0 かつ |x| = -x とおきなおす)

(3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 4x} - x)$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 4x} - x)(\sqrt{x^2 + 4x} + x)}{\sqrt{x^2 + 4x} + x}$$
  

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x - x^2}{\sqrt{x^2 + 4x} + x}$$
  

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + 1}$$
  

$$= 2$$

(4)  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \pi t}{t - 1}$

$x - 1 = t$  とおく。  
 (与式)  $= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \pi(t+1)}{t}$   
 $= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi t + \pi)}{t}$   
 $= \lim_{t \rightarrow 0} \left( -\frac{\sin \pi t}{t} \right)$   
 $= \lim_{t \rightarrow 0} \left( -\frac{\sin \pi t}{\pi t} \cdot \pi \right)$   
 $= -\pi$

(5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin 3x)}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin 3x)}{\sin 3x} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3$$
  

$$= 3$$

(6)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{2^x}$

$-1 \leq \cos x \leq 1$  かつ  
 $-\frac{1}{2^x} \leq \frac{\cos x}{2^x} \leq \frac{1}{2^x}$   
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{2^x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2^x} = 0$  かつ  
 はさみうちの原理から  
 (与式)  $= 0$

(7)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (1 + 2x)^{\frac{1}{2x}} \right\}^2$$
  

$$= e^2$$

(8)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{\sin(x - a)}$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} \cdot \frac{x - a}{\sin(x - a)}$$
  
 $(\sin x)' = \cos x$  かつ  
 (与式)  $= \cos a$

2 次の極限を求めよ。

(1)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + x - 2}$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{(x+2)(x-1)}$$
  

$$= -\frac{12}{3}$$
  

$$= -4$$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 - \frac{2}{x} \right)$$
  

$$= \infty$$

参考:  $\sqrt{x^2 + a}$  とおく?  $x \rightarrow \infty$   
 $a > 0$  ならば、 $a$  を無視する。複雑  
 $(\sqrt{x^2} = |x|)$  とおきなおす。  
 $(\sqrt{x^2 + a} = |x| + \frac{a}{2|x|} + \dots)$

(3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$

$t = -x$  とおき、 $x \rightarrow -\infty$  かつ  $x < 0$   
 $t \rightarrow \infty$  かつ  $t < 0$ 。  
 (与式)  $= \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{t^2 - t} - t)$   
 $= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{t^2 - t} - t)(\sqrt{t^2 - t} + t)}{\sqrt{t^2 - t} + t}$   
 $= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2 - t - t^2}{\sqrt{t^2 - t} + t}$   
 $= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{t}} + 1} = -\frac{1}{2}$

(4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x \cdot \sin x (1 + \cos x)}$$
  

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x \cdot \sin x (1 + \cos x)}$$
  

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{(1 + \cos x)}$$
  

$$= \frac{1}{2}$$

(5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\sin \frac{x}{\pi}\right)}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\sin \frac{x}{\pi}\right)}{\sin \frac{x}{\pi}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{\pi}}{x} \cdot \frac{1}{\pi}$$
  

$$= \frac{1}{\pi}$$

(6)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$

$-1 \leq \sin x \leq 1$  かつ  
 $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$   
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$  かつ  
 はさみうちの原理から  
 (与式)  $= 0$

(7)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x}{2x+1} \right)^x$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x}$$
  

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left\{ \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x} \right\}^{\frac{1}{2}}}$$
  

$$= \frac{1}{\sqrt{e}}$$

(8)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \log \frac{x}{2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log x - \log 2}{x - 2}$$
  
 $f(x) = \log x$  とおき、 $f'(x) = \frac{1}{x}$  かつ  
 (与式)  $= f'(2) = \frac{1}{2}$

$\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e$   
 $h = \frac{1}{k}$  とおき、 $h \rightarrow 0$  かつ  $h > 0$   
 $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = e$

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$