

<相加相乗平均について>

2次は(左)-(右)で示すことができる。

では、3次、4次は？

突然示すことができると、意外に示すのが大変なことがある。

$$a > 0, b > 0, c > 0 \text{ かつ}$$

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \quad (\text{等号は } a=b=c)$$

[証明]

$x > 0, y > 0, z > 0$ かつ

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

$$= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

$$= (x+y+z) \left\{ \frac{1}{2}(x-y)^2 + \frac{1}{2}(y-z)^2 + \frac{1}{2}(z-x)^2 \right\}$$

$$\geq 0$$

よって $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$

∴ $x = \sqrt[3]{a}, y = \sqrt[3]{b}, z = \sqrt[3]{c}$ とおくと

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

等号は $x=y=z$ かつ $a=b=c$ かつ

$$a > 0, b > 0, c > 0, d > 0 \text{ かつ}$$

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$$

(等号は $a=b=c=d$ かつ)

[証明]

a, b, c, d は 0 より大きい 2 数は示す
相加相乗平均の式を使う。

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \frac{2\sqrt{ab} + 2\sqrt{cd}}{4}$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{ab} + \sqrt{cd})$$

$$\geq \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}}$$

$$= \sqrt[4]{abcd}$$

等号は、相加相乗平均の式を用いた2回の場所にて
等号が成り立つ場合のみ。

$$a=b, c=d \text{ かつ } \sqrt{ab} = \sqrt{cd}$$

よって $a=b=c=d$ かつ

n 次のものを示すための準備として、2次を示す。

$$a_1 \geq a_2, b_1 \geq b_2 \text{ かつ}$$

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 \geq a_1 b_2 + a_2 b_1$$

[証明] $x_1 \geq x_2$ かつ $y_1 \geq y_2$ (大きいものを括弧で括弧)

$$(括弧) - (括弧) = a_1 b_1 + a_2 b_2 - (a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

$$= a_1(b_1 - b_2) + a_2(b_2 - b_1)$$

$$= (a_1 - a_2)(b_1 - b_2)$$

$$\geq 0$$

等号は $a_1 = a_2$ かつ $b_1 = b_2$ かつ

$$a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0 \text{ かつ}$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

(等号は $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ かつ)

[証明]

3次の場合と同様に考えよう。

$$x_1 = \sqrt[n]{a_1}, x_2 = \sqrt[n]{a_2}, \dots, x_n = \sqrt[n]{a_n} \text{ かつ}$$

次の式と同値

$$x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n \geq n x_1 x_2 \dots x_n$$

よって、これを示せばよい。

$x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ とし、一般性を失わずに

$$x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n$$

$$\geq x_1^n + x_2^n + \dots + x_{n-1}^{n-1} x_n + x_n^{n-1} x_{n-1} \quad (*\text{より})$$

(最後の2項は $x_{n-1}^{n-1} x_n + x_n^{n-1} x_{n-1}$ とおくと
* を使えば)

この方針を考へる。"=" or "≥" に付きかたりに、
 $x_i \geq x_j$ のとき、各項から $1/x_i, x_j$ を消して
 消滅するところまで消すことにする。 (1) x_1, x_2

$$x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n$$

$$\geq \underbrace{x_1^{n-1} x_2 + x_2^{n-1} x_1 + \dots + x_{n-1}^{n-1} x_n + x_1 x_2 \dots x_n}_{(*)}$$

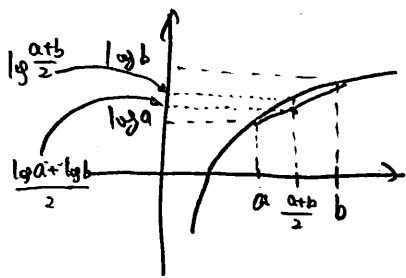
同様に x_i^{n-1} を消すことにより (n-1) 回に行くと

$$(*) \geq x_1 x_2 \dots x_n + x_1 x_2 \dots x_n + \dots + x_1 x_2 \dots x_n$$

$$= n x_1 x_2 \dots x_n$$

{ 等号 } 示すには、等号は $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ のとき

③ 2項の不等式の証明は、(左) - (右) のほか



① $y = \log x$ の凸性

$y = \log x$ は凹性

$$\log \frac{a+b}{2} \geq \frac{\log a + \log b}{2}$$

$$\log \frac{a+b}{2} \geq \log(ab)^{\frac{1}{2}}$$

$$e^{>} \log \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

② 左図より

$$OA = \frac{a+b}{2}$$

円と直線の定理より

$$AP^2 = ab$$

$$\therefore AP = \sqrt{ab}$$

三平方の定理より、 $OA \geq AP$ となる

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

等号は $a=b$ のとき

④ 4項を示すには、3項の不等式を

$$a+b+c+d \geq 4\sqrt[4]{abcd}$$

に適用し、 $d = \frac{a+b+c}{3}$ とする

$$a+b+c + \frac{a+b+c}{3} \geq 4\sqrt[4]{abc \cdot \frac{a+b+c}{3}} \dots (*)$$

これを $\frac{4(a+b+c)}{3}$ とする

4項の不等式と同様に

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[4]{abc \cdot \frac{a+b+c}{3}}$$

両辺を4乗して

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4 \geq abc \cdot \frac{a+b+c}{3}$$

$\frac{a+b+c}{3}$ の両辺を4乗し、3乗根をとり示せば