

<等面四面体>

4つの面がすべて合同である四面体を
等面四面体という。... (A)

以下と同値

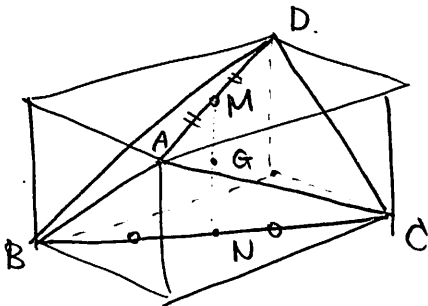
- 3組の対辺が等しい。... (B)
- 直方体の1つおきの頂点を結んでできる。... (C)
- 辺の中点を結んでできる線分は互いに垂直。... (D)
- 重心、内心、外心が一致する。... (E)

(A) ~ (C) は、わかり易い。(D) でできる交点は

四面体 ABCD の頂点の位置ベクトルを

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ とすると、 $\frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{4}$ と表せる。

(E) という重心である。

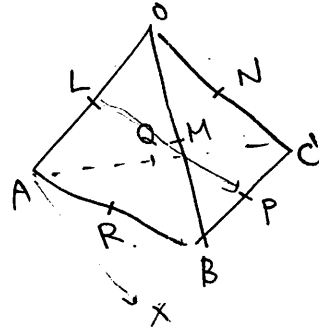


また、左図より
G は M, N の中点であり
頂点の直方体の頂点
であるから、外心でも
ある。

(D) も、上図の MN と、直方体の辺が平行だから
成り立つ...

不足も多いが、 $\lambda < \mu$ の直に λ と μ を付け
大丈夫かと。

(略解)



(1) LP の中点を P とすると

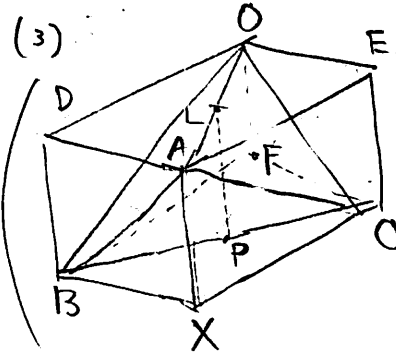
$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \frac{1}{2}(\vec{OL} + \vec{OP}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \end{aligned}$$

同様に MQ の中点、NR の中点もこのように表し、
1点で交わる。

$$\begin{aligned} (2) \vec{p} &= \vec{LP} \\ &= \vec{OP} - \vec{OL} \\ &= \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) - \frac{1}{2}\vec{a} \\ &= \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{同様にして } \vec{q} &= \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) \\ \vec{r} &= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) \end{aligned}$$

よって
 $\vec{a} = \vec{q} + \vec{r}, \vec{b} = \vec{r} + \vec{p}, \vec{c} = \vec{p} + \vec{q}$



等面四面体の性質
から、X は図の直方体
の頂点である。
 $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ も直方体の
辺と平行なベクトルに
なっている。

上図のように四面体の頂点を

頂点にもつ平行四面体を考へると

LP, MQ, NR が互いに垂直である。

平行四面体は直方体になる。

よって XABC の体積は

$$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}|\vec{p}| \cdot |\vec{q}|\right) \cdot |\vec{r}| = \frac{1}{6} \cdot |\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot |\vec{r}|$$

四面体 OABC にする。 $\vec{a} = \vec{OA}, \vec{b} = \vec{OB}, \vec{c} = \vec{OC}$ とおく。
線分 OA, OB, OC, BC, CA, AB
の中点を結ぶと L, M, N, P, Q, R とし

$\vec{p} = \vec{LP}, \vec{q} = \vec{MQ}, \vec{r} = \vec{NR}$ とおく

(1) 線分 LP, MQ, NR は 1点で交わることを示す

(2) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ を用いて表す

(3) 直線 LP, MQ, NR が互いに垂直であることを示す

X は $\vec{AX} = \vec{LP}$ である空間の点とすると、四面体

XABC の体積を $|\vec{p}|, |\vec{q}|, |\vec{r}|$ を用いて表す