

$\langle 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ と $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$ の話

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \infty \text{ となる.}$$

$a_n = \frac{1}{n}$ とするとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ となる. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する. 有名な例になる.

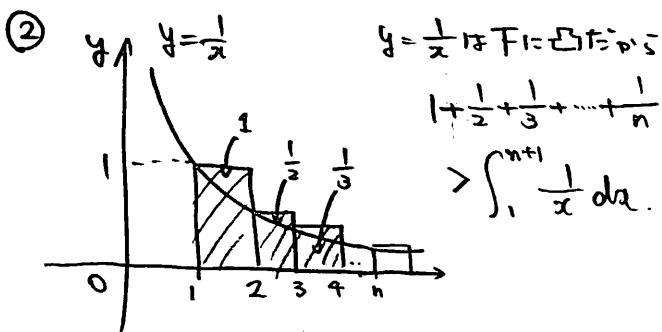
① オレムの方法

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}) + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

よって発散する. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \infty$ となる.



$$\therefore \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \log(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

よって発散する.

③ $e^x \geq 1+x$ を使う.

$$\begin{aligned} e^{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}} &= e^1 \cdot e^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{3}} \cdot \dots \cdot e^{\frac{1}{n}} \\ &\geq (1+1)(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3}) \dots (1+\frac{1}{n}) \\ &= 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{n+1}{n} \\ &= n+1. \end{aligned}$$

両辺の対数をとると

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \geq \log(n+1)$$

$\log(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ より示す.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \log 2 \text{ となる}$$

x 以外の部分と対称する. III の積分の問題と似て頻出.

① 積分を使う. (概略のみ, 詳細はライオンズ・X(1)の参考)

$$a_n = \int_0^1 \frac{1 - (-x)^n}{1+x} dx \text{ となる.}$$

$$1 + (-x) + (-x)^2 + \dots + (-x)^{n-1} \text{ となる.}$$

積分すると

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots - (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \text{ となる.}$$

$$a_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx - \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x} dx$$

とすると.

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x} dx \right| &\leq \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x} |dx| \\ &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \\ &\leq \int_0^1 x^n dx \\ &= \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

よって 0 に収束.

よって $\log 2$ となる.

② $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$

$$\begin{aligned} &= (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}) - 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}) \\ &= (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}) - (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}) \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \end{aligned}$$

よって.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \log 2. \end{aligned}$$

(参考: 大学の数学)