

< 凸関数と不等式 >

関数 $y = f(x)$ の第 2 次導関数 $f''(x)$ の値が常に正とする。このとき、実数 a, b, t ($a > b, 0 < t < 1$) について、不等式 $f((1-t)a + tb) < (1-t)f(a) + tf(b)$ が成り立つことを示せ。また、等号が成り立つのは、どのような場合か。

(大阪市大・理)

【解答】

$f''(x) > 0$ より、 $y = f(x)$ のグラフは下に凸である。従って、グラフ上の任意の 2 点 A, B をとると、線分 AB の両端を除いた部分は必ず、 $y = f(x)$ のグラフより上方にある。

今、 $A(a, f(a)), B(b, f(b))$ とする。 $(a, 0), (b, 0)$ を $t : 1-t$ に内分する点は $((1-t)a + tb, 0)$ である。先に述べたことから、 $((1-t)a + tb, f((1-t)a + tb))$ は線分 AB の下方にある。一方、線分 AB を $t : 1-t$ に内分する点は $((1-t)a + tb, (1-t)f(a) + tf(b))$ であるので、以上の関係を不等式で表すと、

$$f((1-t)a + tb) < (1-t)f(a) + tf(b)$$

となる。等号は $a = b$ のときで、2 つの点が一致した場合である。

この問題のテーマは凸関数である。

【凸関数の定義】

実数の区間 I で定義された関数について、この区間内の異なる任意の 2 点 x_1, x_2 と、 $p_1 + p_2 = 1, p_1 > 0, p_2 > 0$ となる任意の p_1, p_2 に対して、

$$f(p_1x_1 + p_2x_2) < p_1f(x_1) + p_2f(x_2)$$

が成立するとき、 f は区間 I で凸関数であるという。

【凸関数の性質】

f が区間 I で定義された凸関数ならば、この区間内の任意の x_1, x_2, \dots, x_n と、 $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1, p_1 > 0, p_2 > 0, \dots, p_n > 0$ を満たす任意の p_1, p_2, \dots, p_n に対して、次の不等式が成立する。

$$f(p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n) < p_1f(x_1) + p_2f(x_2) + \dots + p_nf(x_n)$$

等号は $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ のときに成立する。

証明は、帰納法で行う。(98 大阪市大・理で出題)

① 正数 a, b に対して、 $\frac{a^3 + b^3}{2}$ と $\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$ の大小を比較せよ。

(03 名大(1)のみ)

【略解 1】

$y = x^3$ において凸性を使えば秒殺

【略解 2】

$$\frac{a^3 + b^3}{2} - \frac{(a+b)^3}{8} = \dots = \frac{3(a-b)^2(a+b)}{8} \geq 0$$

【略解 3】

$$\frac{a^3 + b^3}{2} - \frac{(a+b)^3}{8} = \frac{3(a^3 + b^3 - a^2b - ab^2)}{8}$$

ここで、 $f(a) = a^3 - ba^2 - b^2a + b^3$ とすると、 $f'(a) = (3a + b)(a - b)$ より、 $a = -\frac{b}{3}$ 、 b で極値をもつ。 $a > 0, f(b) = 0$ により示される。

【略解 4】

$b^3 > 0$ より、両辺を b^3 で割ったものを比較しても同値。つまり、

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^3 + 1}{2} - \left(\frac{\frac{a}{b} + 1}{2}\right)^3$$

を計算すればよい。 $\frac{a}{b} = x$ とし、この式を $f(x)$ とすると、

$$f(x) = \frac{3}{8}(x^3 - x^2 - x + 1)$$

$x = -\frac{1}{3}$ で極大値、 $x = 1$ で極小値をもつが、 $x > 0, f(1) = 0$ より、この値が 0 以上であることが示される。

【略解 5】

$a + b = s, ab = t$ とする。 a, b は x の二次方程式

$$x^2 - sx + t = 0$$

の解であり、 a, b は実数だから、

$$s^2 - 4t \geq 0$$

である。従って、

$$\begin{aligned} \frac{a^3 + b^3}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 &= \frac{1}{2}(s^3 - 3st) - \frac{1}{8}s^3 \\ &= \frac{3}{8}s(s^2 - 4t) \geq 0 \end{aligned}$$

がわかる。

【練習】正数 a, b, x, y を考える。 $a + b = 1$ ならば、全ての自然数 n に対して不等式 $(ax + by)^n \geq ax^n + by^n$ が成立することを証明せよ。

(08 慶応大)

② 実数 a, b ($0 < a < \frac{\pi}{4}, 0 < b < \frac{\pi}{4}$) に対し、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$(1) \tan\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{1}{2}(\tan a + \tan b)$$

$$(2) \sqrt{\tan a \cdot \tan b} < \tan\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

(91 京大・理(改))

【略解】

(1) $f(x) = \tan x$ とする。

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, f''(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} > 0$$

より、 $y = f(x)$ のグラフは下に凸である。

よって、 $(a, \tan a)$ と $(b, \tan b)$ の中点

$$\left(\frac{a+b}{2}, \frac{1}{2}(\tan a + \tan b)\right)$$

よりも、 $\left(\frac{a+b}{2}, \tan \frac{a+b}{2}\right)$ の方が、下側にあるので、 y 座標を比較することによって、証明することができる。(図省略)

(2) $ab = 0$ のとき、明らかに成り立つ。

$a \neq 0, b \neq 0$ のとき、両辺の対数をとると、次の式と同値である。

$$\frac{1}{2}(\log(\tan a) + \log(\tan b)) < \log\left(\tan \frac{a+b}{2}\right)$$

$g(x) = \log(\tan x)$ とすると、 $\left(0 < x < \frac{\pi}{4}\right)$ において、

$$g'(x) = \frac{2}{\sin 2x}, g''(x) = -\frac{4 \cos 2x}{\sin^2 2x} < 0$$

より $y = g(x)$ のグラフは上に凸。よって図のようになり(図省略) 成り立つことがわかる。

③ α, β, γ は $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \alpha + \beta + \gamma = \pi$ を満たすものとする。このとき、 $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ の最大値を求めよ。

(99 京大後・理)

【略解 1】

$0 < x < \pi$ において、 $\sin x > 0$ より、 $f(x) = \log(\sin x)$ とする。

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}, f''(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} < 0$$

となるので、 $y = f(x)$ のグラフは上に凸。すると、3 点 $(\alpha, f(\alpha)), (\beta, f(\beta)), (\gamma, f(\gamma))$ から作られる三角形の重心 G は、 $y = f(x)$ より下側にあるので、 $x = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}$

における y 座標を比較することにより、

$$\frac{f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma)}{3} = f\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}\right)$$

これを变形、整理することにより、 $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ から、

$$\sqrt[3]{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} = \sin \frac{\pi}{3}$$

を得る。両辺を 3 乗することにより、 $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$ のとき、最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ であることがわかる。

【略解 2】

α を定数と見なして固定すると、

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \sin \alpha \cdot \frac{1}{2} \{\cos(\beta - \gamma) - \cos(\beta + \gamma)\}$$

$\cos(\beta + \gamma) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$, $\sin \alpha > 0$ より、

$$\begin{aligned} \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma &= \frac{1}{2} \sin \alpha \{\cos(\beta - \gamma) + \cos \alpha\} \\ &= \frac{1}{2} \sin \alpha (1 + \cos \alpha) \end{aligned}$$

であり、等号は $\beta = \gamma$ のときである。

$f(\alpha) = \frac{1}{2} \sin \alpha (1 + \cos \alpha)$ とする。これを微分すると、

$f'(\alpha) = (2 \cos \alpha - 1)(\cos \alpha + 1)$ となるので、最大値を出す(計算略)、 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ で極大かつ最大である。

いずれの解法も重要である。