

< 凸関数と不等式 >

関数  $y = f(x)$  の第2次導関数  $f''(x)$  の値が常に正とする.このとき,実数  $a, b, t$  ( $a < b, 0 < t < 1$ ) について,不等式

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$$

が成り立つことを示せ. また, 等号が成り立つのは, どのような場合か.

(大阪市大・理)

① 正数  $a, b$  に対して,  $\frac{a^3 + b^3}{2}$  と  $\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$  の大小を比較せよ.

(03 名大(1)のみ)

【練習】 正数  $a, b, x, y$  を考える. $a + b = 1$  ならば, 全ての自然数  $n$  に対して不等式  $(ax + by)^n \leq ax^n + by^n$  が成立することを証明せよ.

(08 慶応大)

② 実数  $a, b$  ( $0 < a < \frac{\pi}{4}, 0 < b < \frac{\pi}{4}$ ) に対し, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$(1) \tan\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(\tan a + \tan b)$$

$$(2) \sqrt{\tan a \cdot \tan b} \leq \tan\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

(91 京大・理(改))

③  $\alpha, \beta, \gamma$  は  $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \alpha + \beta + \gamma = \pi$  を満たすものとする.このとき,  $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$  の最大値を求めよ.

(99 京大後・理)