

< オイラー線とベクトル >

鋭角三角形 ABC の外心を O, 内心を I, 重心を G, 垂心を H とする. また, 三辺の長さを $AB = l, BC = m, CA = n$ とする. $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}$ とするとき, 次の問に答えよ.

- (1) \vec{OI} を, $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}$ で表せ.
 (2) \vec{OH} を, $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}$ で表し, $OG:GH$ を求めよ.

(1) 角の二等分線の性質から, $BD:DC = l:n$ だから,

$$\vec{AD} = \frac{n}{l+n}\vec{AB} + \frac{l}{l+n}\vec{AC}$$

また, $AI:ID = l:\frac{l}{l+n}m = 1:\frac{m}{l+n}$ なので,

$$\begin{aligned} \vec{AI} &= \frac{1}{\frac{m}{l+n} + 1} \vec{AD} \\ &= \dots \\ &= \frac{1}{l+m+n} \{ -(l+n)\vec{a} + n\vec{b} + l\vec{c} \}. \end{aligned}$$

従って, $\vec{OI} = \vec{OA} + \vec{AI}$ より,

$$\begin{aligned} \vec{OI} &= \vec{OA} + \vec{AI} \\ &= \frac{m\vec{a} + n\vec{b} + l\vec{c}}{l+m+n}. \end{aligned}$$

(1) に関しては, 外心の性質を使っていないので, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は通常の位置ベクトルと考えても良い.

一般的に, $m\vec{PA} + n\vec{PB} + l\vec{PC} = \vec{0}$ のような式があったときには,

$$\vec{p} = \frac{m\vec{a} + n\vec{b} + l\vec{c}}{l+m+n} = \frac{l\vec{c} + (m+n)\frac{m\vec{a} + n\vec{b}}{m+n}}{l+m+n}$$

となり, 線分 AB を $n:m$ に内分する点を D とすると, $DP:PC = l:m+n$ になっている.

(A に「 m 」, B に「 n 」, C に「 l 」, D に「 $m+n$ 」という重みがあると考えてみよ.)

また, これにより, $ABC = S$ とすると,

$$PBC = \frac{m}{l+m+n}S,$$

$$PCA = \frac{n}{l+m+n}S,$$

$$PAB = \frac{l}{l+m+n}S$$

が成り立ち, $PBC:PCA:PAB = m:n:l$ である.

(2) 線分 BC の中点を M とすると, $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$ なので, 実数 k を用いて, $\vec{AH} = k(\vec{b} + \vec{c})$ と書ける. 従って, $\vec{OH} = \vec{a} + k\vec{b} + k\vec{c}$.

このとき, $\vec{BH} \cdot \vec{AC} = 0, |\vec{a}|^2 = |\vec{c}|^2$ より,

$$(\vec{a} + (k-1)\vec{b} + k\vec{c}) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0$$

$$(k-1)(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{c}) = 0.$$

従って, $k=1$ または, $\vec{BA} \cdot \vec{CA} = 0$ となるが, ABC は鋭角三角形だから, $\vec{BA} \cdot \vec{CA} \neq 0$. よって, $k=1$. 従って,

$$\vec{OH} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$

$\vec{OH} = 3\vec{OG}$ より, $OG:GH = 2:1$.

これにより, O, G, H は一直線上にあることがわかり, この 3 点を通る直線を「オイラー線」という.