

## ベクトルの活用

1年 \_\_\_\_\_ 組 \_\_\_\_\_ 氏名 \_\_\_\_\_

全てベクトルを用いて考えよ.

### 1 【シュワルツの不等式】

次の不等式を証明せよ.

$$(1) (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$$

$$(2) (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$$

### 2 【直線の方程式】

- (1)  $\vec{n} = (a, b)$  と垂直な直線は、 $ax + by + c = 0$  の形に表せることを示せ.
- (2) 2 直線  $ax + by + c = 0, a'x + b'y + c' = 0$  が平行であるための条件は、 $ab' - ba' = 0$  であることを示せ.
- (3) 2 直線  $ax + by + c = 0, a'x + b'y + c' = 0$  が垂直であるための条件は、 $aa' + bb' = 0$  であることを示せ.

3 【円の接線】

- (1) 円  $x^2 + y^2 = r^2$  上の点  $P(x_1, y_1)$  における円の接線の方程式が次式で表せることを示せ.

$$x_1x + y_1y = r^2$$

- (2) 円  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  上の点  $P(x_1, y_1)$  における円の接線の方程式が次式で表せることを示せ.

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$$

4 【座標平面の面積】

- (1) 3点  $(-2, 1), (4, -1), (5, 7)$  で作られる三角形の面積を求めよ.
- (2) 3点  $(a, 1), (3a, -2), (1, -1)$  で作られる三角形の面積が 2 になるような  $a$  の値を求めよ.

5 【最大最小】

$x^2 + y^2 = 1$  のとき,  $2x + 3y$  の最大値と最小値を求めよ.

6 【座標の扱い方】

- (1)  $(3, 3)$  を点  $(1, 2)$  を中心として  $\frac{\pi}{3}$  回転させた点  $Q$  の座標を求めよ.
- (2) 円  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  上の点  $(x, y)$  を, 角度  $\theta$  を用いたパラメータ表示で表せ.

7 【平面と直線】

直線  $l$  が, 平面  $\alpha$  上の交わる 2 直線  $m, n$  に垂直ならば, 直線  $l$  は平面  $\alpha$  に垂直であることを示せ.

直線  $l$  と平面  $\alpha$  が垂直であるとは, 平面  $\alpha$  上の任意のベクトルと直線  $l$  が垂直であることである.

8 【正射影】

- (1) 三角形 ABC において、外心を O とする。 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}AB^2$  となることを示せ.
- (2) 点  $P(a, b)$  から、直線  $y = 2x$  に下ろした垂線の足を H とするとき、H の座標を  $x, y$  を用いて表せ.
- (3)  $\vec{a} = (1, 1)$ ,  $\vec{x} = (x, y)$  とする。 $\vec{a} \cdot \vec{x} = k$  はどのような図形を表すか.

9 【点と直線の距離】

点  $P(x_1, y_1)$  と直線  $ax + by + c = 0$  の距離  $d$  は、次の式で与えられることを示せ.

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$