

# ベクトルの活用

1年 \_\_\_\_\_ 組 \_\_\_\_\_ 氏名 \_\_\_\_\_

※全てベクトルを用いて考えよ。

## 1 【シュワルツの不等式】

次の不等式を証明せよ。

- (1)  $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$
- (2)  $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$

$\vec{u} = (a, b), \vec{v} = (x, y)$  とする。

$\vec{u}, \vec{v}$  のなす角を  $\theta$  とすると。

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\theta$$

が成り立つから。

$$|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \geq |\vec{u} \cdot \vec{v}| \dots *$$

からいえる。  $-\vec{v}$

$$|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}, |\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ax + by$$

でいえるから、\*に代入すると。

$$\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \geq |ax + by|$$

両辺を2乗すると

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$$

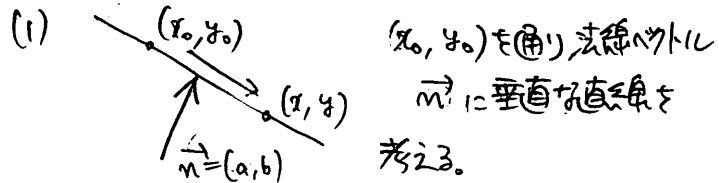
※(1)~(2)でもうおんなじベクトルで考えれば。

意味も理解できる。

(2)も同様なやり方で各自でやると。

## 2 【直線の方程式】

- (1)  $\vec{n} = (a, b)$  と垂直な直線は、 $ax + by + c = 0$  の形に表せることを示せ。
- (2) 2直線  $ax + by + c = 0, a'x + b'y + c' = 0$  が平行であるための条件は、 $ab' - ba' = 0$  であることを示せ。
- (3) 2直線  $ax + by + c = 0, a'x + b'y + c' = 0$  が垂直であるための条件は、 $aa' + bb' = 0$  であることを示せ。

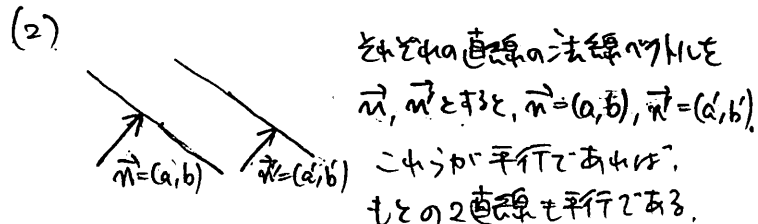


ベクトル  $(x - x_0, y - y_0)$  と、ベクトル  $(a, b)$  が垂直であればよいから。内積が0になることから。

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

$$ax + by + (-ax_0 - by_0) = 0$$

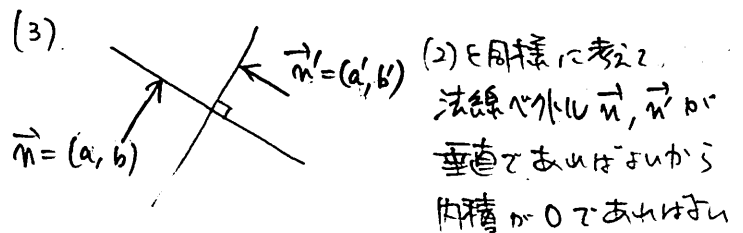
$-ax_0 - by_0 \in \mathbb{C}$  とおきかえれば、表せることわかる。



よって、 $(a, b) \parallel (a', b')$  より

$$a : b = a' : b'$$

$$\therefore ab' - a'b = 0$$



$$(\vec{t} \cdot \vec{v}) = 0$$

$$a \cdot a' + b \cdot b' = 0$$

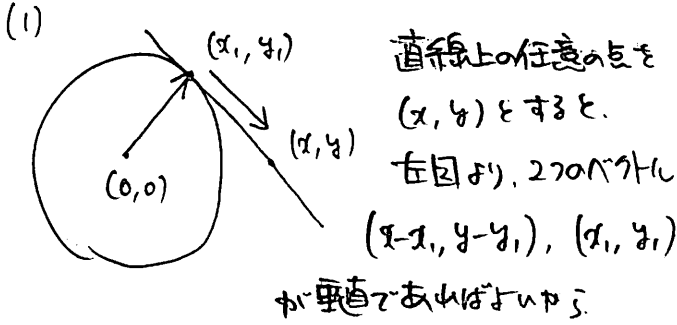
3 【円の接線】

(1) 円  $x^2 + y^2 = r^2$  上の点  $P(x_1, y_1)$  における円の接線の方程式が次式で表せることを示せ.

$$x_1x + y_1y = r^2$$

(2) 円  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$  上の点  $P(x_1, y_1)$  における円の接線の方程式が次式で表せることを示せ.

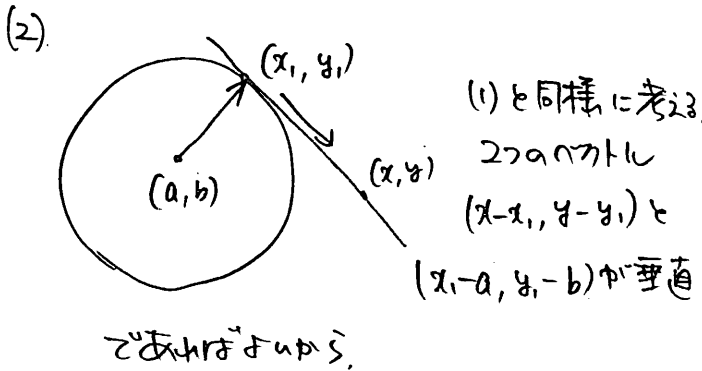
$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$$



$$x_1(x-x_1) + y_1(y-y_1) = 0$$

$$x_1x + y_1y = x_1^2 + y_1^2$$

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2 \text{ より } x_1x + y_1y = r^2$$



$$(x_1 - a)(x - x_1) + (y_1 - b)(y - y_1) = 0$$

変形して

$$(x_1 - a)(x - a + a - x_1) + (y_1 - b)(y - b + b - y_1) = 0$$

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2$$

より

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$$

\* 上記の考え方のあはれは、接線の法線ベクトルが、それぞれ

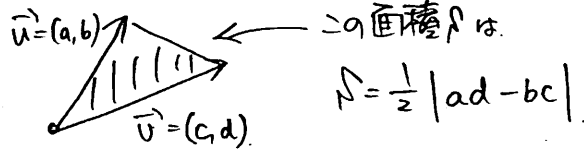
$$(x_1, y_1), (x_1 - a, y_1 - a)$$

であることは明らかで、内積をとることを考えれば、 $x, y$  の係数が上記のようになるのは明らかである。

4 【座標平面の面積】

(1) 3点  $(-2, 1), (4, -1), (5, 7)$  で作られる三角形の面積を求めよ。

(2) 3点  $(a, 1), (3a, -2), (1, -1)$  で作られる三角形の面積が2になるような  $a$  の値を求めよ。



\* 「図形と方程式」で、この公式は出てくるが、原点以外の2点の座標が与えられたときとなっている。しかし、ベクトルで考えれば、原点でなくとも公式が使え、活用の幅が広がる。

(1)  $(4, -1) - (-2, 1) = (6, -2)$ ,  
 $(5, 7) - (-2, 1) = (7, 6)$  より求める面積  $S$  は、  
 $\frac{1}{2} |6 \cdot 6 - (-2) \cdot 7| = 25$

(2)  $(3a, -2) - (a, 1) = (2a, -3)$ ,  
 $(1, -1) - (a, 1) = (1-a, -2)$  より、  
 $\frac{1}{2} |2a \cdot (-2) - (-3) \cdot (1-a)| = 2$   
 $|-7a + 3| = 4$   
 $a = -\frac{1}{7}, 1$

5 【最大最小】

$x^2 + y^2 = 1$  のとき、 $2x + 3y$  の最大値と最小値を求めよ。

$2x + 3y$  を、 $\vec{u} = (2, 3)$  と  $\vec{v} = (x, y)$  の内積ととらえる。

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \theta \quad (\theta \text{ は } \vec{u}, \vec{v} \text{ のなす角})$$

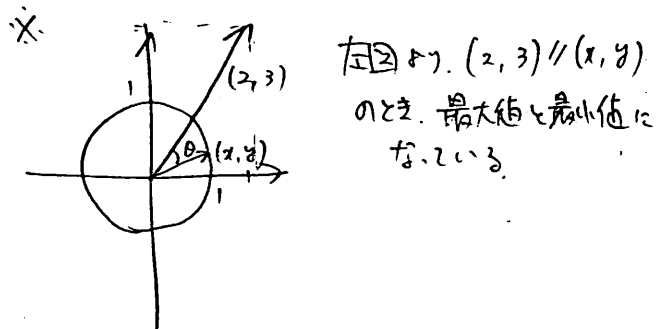
$$\therefore -1 \leq \cos \theta \leq 1 \text{ より}$$

$$-|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \leq \vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}, \quad |\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \text{ より}$$

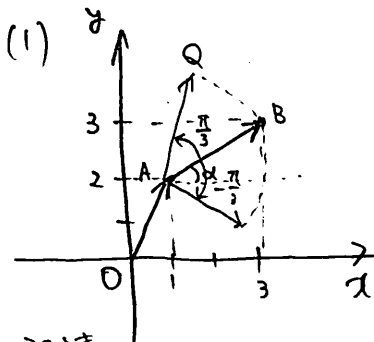
$$-\sqrt{13} \leq 2x + 3y \leq \sqrt{13}$$

よって、最大値  $\sqrt{13}$ 、最小値  $-\sqrt{13}$



6 【座標の扱い方】

- (1) (3,3) を点 (1,2) を中心として  $\frac{\pi}{3}$  回転させた点 Q の座標を求めよ。  
 (2) 円  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$  上の点 (x,y) を、角度  $\theta$  を用いたパラメータ表示で表せ。



A(1,2), B(3,3) とする。  
 また、 $\overrightarrow{AB}$  と x 軸のなす角を  $\alpha$  とする。  
 $\therefore \alpha$  とし、 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5}$  とし。  
 $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\therefore \alpha$  とし、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} \\ &= (1, 2) + (\sqrt{5} \cos \alpha, \sqrt{5} \sin \alpha) \end{aligned}$$

とあり、 $\overrightarrow{OQ}$  は

$$\overrightarrow{OQ} = (1, 2) + \left( \sqrt{5} \cos\left(\alpha \pm \frac{\pi}{3}\right), \sqrt{5} \sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{3}\right) \right)$$

(複号同値)

とわかる。正の方向に  $\frac{\pi}{3}$  回転したときは

$$\begin{aligned} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) &= \cos \alpha \cdot \frac{1}{2} - \sin \alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} \\ &= \frac{2 - \sqrt{3}}{2\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) &= \sin \alpha \cdot \frac{1}{2} + \cos \alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{1 + 2\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} \end{aligned}$$

よ、 $\therefore \alpha$  とし、Q は

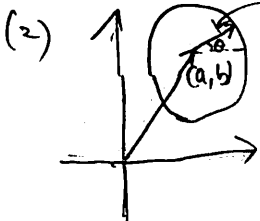
$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= (1, 2) + \left( \sqrt{5} \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{2\sqrt{5}}, \sqrt{5} \cdot \frac{1 + 2\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} \right) \\ &= (1, 2) + \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} + \sqrt{3} \right) \\ &= \left( 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2} + \sqrt{3} \right) \end{aligned}$$

同様に負の方向に  $\frac{\pi}{3}$  回転したときは

$$\left( 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2} - \sqrt{3} \right)$$

とあるので、求める点は

$$\left( 2 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2} \mp \sqrt{3} \right) \quad (\text{複号同値})$$

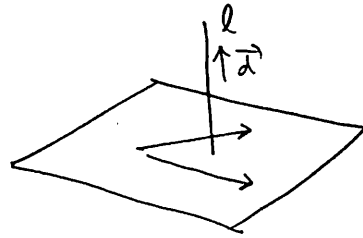


$(r \cos \theta, r \sin \theta)$   
 左図のように考え、  
 $(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta)$

7 【平面と直線】

直線  $l$  が、平面  $\alpha$  上の交わる 2 直線  $m, n$  に垂直ならば、直線  $l$  は平面  $\alpha$  に垂直であることを示せ。

※ 直線  $l$  と平面  $\alpha$  が垂直であるとは、平面  $\alpha$  上の任意のベクトルと直線  $l$  が垂直であることである。



直線  $m, n$  の  
 方向ベクトルをそれぞれ  
 $\vec{u}, \vec{v}$  とする。

$\alpha$  上の任意の直線の方向ベクトルは、定数  $a, b$  を用いて

$$a\vec{u} + b\vec{v}$$

と表せる。また、 $l$  の方向ベクトルを  $\vec{d}$  とすると

$$\vec{d} \cdot \vec{u} = 0, \quad \vec{d} \cdot \vec{v} = 0$$

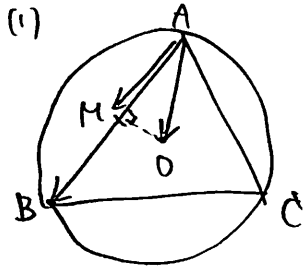
$$\begin{aligned} \vec{d} \cdot (a\vec{u} + b\vec{v}) &= a\vec{d} \cdot \vec{u} + b\vec{d} \cdot \vec{v} \\ &= 0 \end{aligned}$$

よ、 $\vec{d}$  は  $a\vec{u} + b\vec{v}$  に垂直である。

よって示された。

8 【正射影】

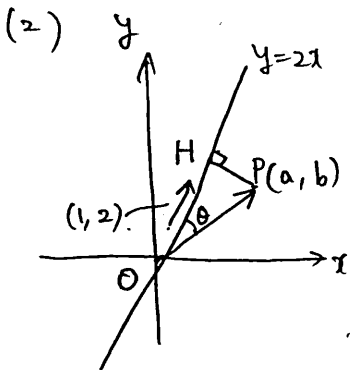
- (1) 三角形 ABC において、外心を O とする。  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2} AB^2$  となることを示せ。
- (2) 点 P(a, b) から、直線  $y = 2x$  に下ろした垂線の足を H とするとき、H の座標を a, b を用いて表せ。
- (3)  $\vec{a} = (1, 1)$ ,  $\vec{x} = (x, y)$  とする。  $\vec{a} \cdot \vec{x} = k$  はどのような図形を表すか。



$\angle OAB = \theta$  とする。  
 O は外心であるから、  
 O から線分 AB に垂線を  
 下す。その足を M とする。  
 $AM = \frac{1}{2} AB$  である。

(1) 示す。

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} &= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AO}| \cdot \cos \theta \\ &= |\overrightarrow{AB}| \cdot AM \\ &= \frac{1}{2} AB^2 \end{aligned}$$



$y = 2x$  の方向ベクトル  
 は  $(1, 2)$  である  
 ( $\therefore \vec{m} = (1, 2)$  とする)

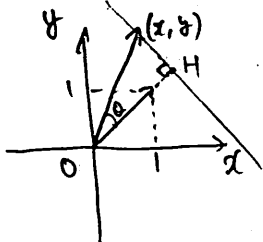
$\angle POH = \theta$  とすると  
 $\vec{m} \cdot \overrightarrow{OP} = |\vec{m}| |\overrightarrow{OP}| \cos \theta$   
 $\uparrow$   
 $= |\vec{m}| \cdot OH$  の  
 符号付き長さ

$$\left( OH \text{ の符号付き長さ} \right) = \frac{\vec{m} \cdot \overrightarrow{OP}}{|\vec{m}|} = \frac{a+2b}{\sqrt{5}}$$

∴  $\vec{OH} = \frac{\vec{m} \cdot \overrightarrow{OP}}{|\vec{m}|} \cdot \frac{\vec{m}}{|\vec{m}|}$  ←  $\therefore$   $\vec{m}$  の正射影ベクトル

$$\begin{aligned} &= \frac{a+2b}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} (1, 2) \\ &= \left( \frac{a+2b}{5}, \frac{2(a+2b)}{5} \right) \end{aligned}$$

(3)  $\vec{a} \cdot \vec{x} = 1 \cdot x + 1 \cdot y = k$  であり、 $x + y = k$  となり

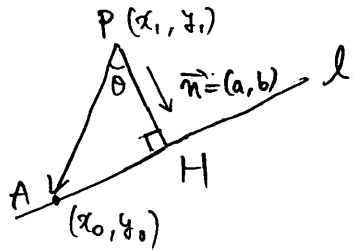


直線  $x+y=k$  の法線ベクトルは  $(1, 1)$  である。  
 $\theta$  は  $\vec{a}$  と法線ベクトルとのなす角。  
 $\therefore \vec{a} \cdot \vec{x} = |\vec{a}| |\vec{x}| \cos \theta = \sqrt{2} |\vec{x}| \cos \theta$   
 $\uparrow$   
 $\sqrt{2}$   $\uparrow$   $\cos \theta$  の符号付き長さ

9 【点と直線の距離】

点  $P(x_1, y_1)$  と直線  $ax + by + c = 0$  の距離  $d$  は、次の式で与えられることを示せ。

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



直線上に  $A(x_0, y_0)$  をとり、  
 垂線の足を H とし、  
 $\angle APH = \theta$  とする。

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} \cdot \vec{n} &= |\overrightarrow{PA}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos \theta \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \cdot |\overrightarrow{PA}| \cdot \cos \theta \end{aligned}$$

∴ 正射影ベクトルの大きさと  $\cos \theta$  の積が  $PH$  の符号付き長さ。

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PH}| &= \frac{|\overrightarrow{PA} \cdot \vec{n}|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{|(x_0 - x_1) \cdot a + (y_0 - y_1) \cdot b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{|ax_1 + by_1 + (-ax_0 - by_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

となる。一方、 $\vec{a} \cdot \vec{x} = k$  かつ  $k \leq \sqrt{2} |\vec{x}|$  である。

$$\begin{aligned} \sqrt{2} OH &= k \\ \therefore OH &= \frac{k}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

つまり、 $\vec{a}$  の方向に正射影する点  $\frac{k}{\sqrt{2}} \pm \frac{k}{\sqrt{2}}$  の線分の  
 OH になるような点の集まりを表すことになる。

$k$  が負や 0 である場合は同様に考えられ、  
 反対側に表わることになる。

$$\left( OH = \frac{k}{\sqrt{2}} \text{ の符号付き長さとして扱う} \right)$$