

Wallis の公式

【問題】 自然数 n に対して、 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 定積分 I_1, I_2, I_3 を求めよ。

(2) 次の不等式を証明せよ。 $I_n \geq I_{n+1}$

(3) 次の漸化式が成り立つことを証明せよ。 $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$

(4) 次の極限値を求めよ。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}$

(大阪教育大)

【解答】

(1) $I_1 = 1, \quad I_2 = \frac{\pi}{4}, \quad I_3 = \frac{2}{3}$

※解き方は教科書などを参考にすること。

(2) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において、 $0 \leq \sin x \leq 1$ なので、

$$\sin^n x \geq \sin^{n+1} x$$

よって、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x \, dx$$

よって、

$$I_n \geq I_{n+1}$$

(3) $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin^{n+1} x \, dx$

$$= [-\cos x \sin^{n+1} x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)(n+1)\sin^n x \cos x \, dx$$

$$= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \sin^n x \, dx$$

$$= (n+1)(I_n - I_{n+2})$$

$$I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2}) \text{ より、}$$

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

(4) すべての k に対し、 $I_k \geq 0$ であり、

(2) より、 $I_{2n} \geq I_{2n+1}$ なので、 $\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq 1$

また、 $I_{2n-1} \geq I_{2n}$ より、 $\frac{I_{2n+1}}{I_{2n-1}} \leq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}$

ここで、(3) より、 $\frac{I_{2n+1}}{I_{2n-1}} = \frac{2n}{2n+1}$

よって、

$$\frac{2n}{2n+1} \leq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{2 + \frac{1}{n}} = 1 \text{ より、}$$

はさみうちの原理から、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$

【解説】

(3) の漸化式より、

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n+1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$$

が成り立つ。よって、

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n+1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{(2n)^2}{(2n+1)(2n-1)} \cdot \frac{\{2(n-1)\}^2}{(2n+1)(2n-1)} \cdots \frac{2^2}{3 \cdot 1}$$

$n \rightarrow \infty$ とすると $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$ より、

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)^2}{(2n+1)(2n-1)} \cdot \frac{\{2(n-1)\}^2}{(2n+1)(2n-1)} \cdots \frac{2^2}{3 \cdot 1}$$

これを wallis の公式という。 π が有理数の無限個の積で表すことができるという超有名な式である。

また、 $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ より、 $x = \frac{\pi}{2} - t$ と置換することにより、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$$

も成り立つので、 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$ でも同様であり、 $\cos x$ で出題されることもある。

入試問題としては類題が数多くある。次のものもよくあるパターンなので何度も練習しておいた方がよい。

【1】 $S_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) とおく.

(1) S_0, S_1 を求めよ.

(2) 漸化式 $S_n = \frac{n-1}{n} S_{n-2}$ ($n \geq 2$) を示せ.

(3) $a_n = nS_n S_{n-1}$ ($n \geq 1$) において、数列 $\{a_n\}$ についての漸化式を導き、 a_n の値を求めよ.
(神戸商船大)

【解答】

(1), (2) は前の問いとほぼ同じなので省略.

(3) $a_{n+1} = (n+1)S_{n+1} \cdot S_n$

$S_{n+1} = \frac{n}{n+1} S_{n-1}$ より

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (n+1) \cdot \frac{n}{n+1} S_{n-1} \cdot S_n \\ &= nS_n \cdot S_{n-1} \\ &= a_n \end{aligned}$$

よって

$$a_{n+1} = a_n = \dots = a_1$$

$a_1 = 1 \cdot S_1 \cdot S_0 = \frac{\pi}{2}$ より

$$a_n = \frac{\pi}{2}$$

【解説】

(3) 以降は、次のようなパターンもある.

(3) $S_n S_{n-1}$ の値を求めよ.

(4) $S_n > S_{n+1}$ が成り立つことを示せ.

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} nS_n^2$ を求めよ.

(3) は $nS_n S_{n-1}$ が定数関数になることを上のように示せばよい. $S_n S_{n-1} = \frac{\pi}{2n}$

(4) は $\sin^n x > \sin^{n+1} x$ を利用する.

(5) は、 $S_n > 0$ と今までの結果から、

$$nS_{n+1}S_n < nS_n^2 < nS_n S_{n-1}$$

が成り立ち、はさみうちをすることによって、
答えは $\frac{\pi}{2}$

なお、この問題の結果から、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nS_n^2 = \frac{\pi}{2}$$

であるが、「例題」の結果から、

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \\ S_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n+1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \end{aligned}$$

であることがわかっている. したがって、 n の無限積の形で π を表せることが例題の解説とは違う方法で示せたことになる. なお、例題から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{2n+1}}{S_{2n}} = 1$$

であるので、 $n \rightarrow \infty$ において、 $S_{2n} \doteq S_{2n+1}$ であり、実際、 n の偶奇によらず、同じ値に収束する.