

## Wallis の公式

【問題】 自然数  $n$  に対して,  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$  とおく. 次の問いに答えよ.

(1) 定積分  $I_1, I_2, I_3$  を求めよ.

(2) 次の不等式を証明せよ.  $I_n \geq I_{n+1}$

(3) 次の漸化式が成り立つことを証明せよ.  $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$

(4) 次の極限値を求めよ.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}$

(大阪教育大)

【1】  $S_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) とおく.

(1)  $S_0, S_1$  を求めよ.

(2) 漸化式  $S_n = \frac{n-1}{n} S_{n-2}$  ( $n \geq 2$ ) を示せ.

(3)  $a_n = n S_n S_{n-1}$  ( $n \geq 1$ ) とおいて, 数列  $\{a_n\}$  についての漸化式を導き,  $a_n$  の値を求めよ.

(神戸商船大)

(3)以降は, 次のようなパターンもある.

(3)  $S_n S_{n-1}$  の値を求めよ.

(4)  $S_n > S_{n+1}$  が成り立つことを示せ.

(5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n S_n^2$  を求めよ.