

< z と w の連動 >

① 複素数 z が $|z|=1$ を満たすとき、次の複素数 w はどのような図形を描くか。

(1) $w = 2z + 1$

(2) $w = \frac{1+i}{z}$

(3) $w = \frac{z-1}{z+2}$

(4) $w = z + \frac{1}{z}$

(有名問題)

(1) 変形して $z = \frac{w-1}{2}$
 $\because |z|=1$ に代入して

$$\left| \frac{w-1}{2} \right| = 1$$

$$\frac{|w-1|}{2} = 1$$

$$|w-1| = 2$$

よって、 w は、 1 を表す点を中心とする半径 2 の円

* 式をみたしたとき、半径 2 倍して、 1 平行移動は $\odot A(1,0)$ がある。

(2) $z = \frac{1+i}{w}$ よって $|z|=1$ に代入して

$$\left| \frac{1+i}{w} \right| = 1$$

$$\frac{|1+i|}{|w|} = 1$$

$$|w| = |1+i|$$

よって、 $|1+i| = \sqrt{2}$ より

$$|w| = \sqrt{2}$$

よって、原点を中心とする、半径 $\sqrt{2}$ の円

(3) 与式より

$$(z+2)w = z-1$$

$$(w-1)z = -(2w+1)$$

よって、 $w=1$ とすると、与式は $4 = \frac{z-1}{z+2}$ となり、これをみたす z は存在しないから

$w \neq 1$ 、よって

$$z = \frac{-(2w+1)}{w-1}$$

$|z|=1$ より

$$\left| \frac{-(2w+1)}{w-1} \right| = 1$$

$$|2w+1| = |w-1|$$

$$|2w+1|^2 = |w-1|^2$$

$$(2w+1)(2\bar{w}+1) = (w-1)(\bar{w}-1)$$

$$4w\bar{w} + 2w + 2\bar{w} + 1 = w\bar{w} - w - \bar{w} + 1$$

$$3w\bar{w} + 3w + 3\bar{w} = 0$$

$$w\bar{w} + w + \bar{w} = 0$$

$$(w+1)(\bar{w}+1) = 1$$

$$|w+1| = 1$$

よって、 -1 を表す点を中心とする半径 1 の円

(4) $|z|=1$ より、 $|z|^2=1$

$$z \cdot \bar{z} = 1$$

$$z \neq 0 \text{ より } \bar{z} = \frac{1}{z}$$

よって、

$$w = z + \bar{z}$$

よって、 $z = x + yi$ とすると

$$z + \bar{z} = 2x$$

z は単位円周上にあるから $-1 \leq x \leq 1$ 、よって

$$\text{よって、 } w = 2x \text{ より}$$

$$-2 \leq w \leq 2$$

よって、 w は $-2, 2$ を表す点を結ぶ線分

* 「 $w = z + \bar{z}$ 」の時点? w は実数であることは分かる。

② $z + \frac{1}{z}$ が実数であるような複素数 z の描く図形を、複素数平面上に図示せよ。

(有名問題)

$z + \frac{1}{z}$ が実数だから

$$z + \frac{1}{z} = \overline{\left(z + \frac{1}{z}\right)}$$

$$z + \frac{1}{z} = \bar{z} + \frac{1}{\bar{z}}$$

両辺に $z\bar{z}$ をかけ

$$z^2\bar{z} + \bar{z} = z\bar{z}^2 + z$$

$$z\bar{z} = |z|^2 \text{ かつ}$$

$$|z|^2 z + \bar{z} = |z|^2 \bar{z} + z$$

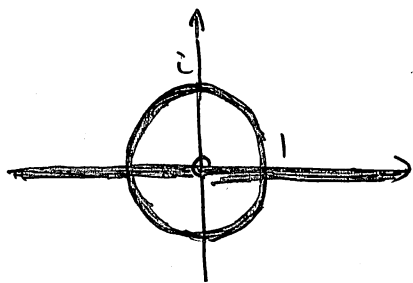
$$|z|^2 (z - \bar{z}) = z - \bar{z}$$

$$(|z|^2 - 1)(z - \bar{z}) = 0$$

よって $z = \bar{z}$ (ただし $z \neq 0$)

または $|z| = 1$

よって z は原点を除く実軸上と、原点を中心とした半径1の円周上を表す。



よって $z + \frac{1}{z} = \bar{z} + \frac{1}{\bar{z}}$ かつ

$$z - \bar{z} + \frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}} = 0$$

$$z - \bar{z} + \frac{z - \bar{z}}{z\bar{z}} = 0$$

$$(z - \bar{z}) \left(1 - \frac{z - \bar{z}}{z\bar{z}}\right) = 0$$

とやってもらう。

例) $z = x + yi$ とする。

$$z + \frac{1}{z} = z + \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$$

$$= x + yi + \frac{x - yi}{x^2 + y^2}$$

$$= \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2}\right) + \left(y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)i$$

よって $z + \frac{1}{z}$ が実数だから

$$y - \frac{y}{x^2 + y^2} = 0$$

$$y \left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2}\right) = 0$$

よって $y = 0$ または $x^2 + y^2 = 1$

(ただし $x^2 + y^2 = 0$ となる原点は $a \neq 0$)

よって、原点を除く実軸上と、原点を中心とした半径1の円を表す。

③ 2つの複素数 z と w の間に $w = \frac{z+i}{z+1}$ なる関係がある。 z が複素数平面上の虚軸を動くとき、 w の軌跡を求め、図示せよ。

(2000 名古屋市立大)

与式より

$$(z+1)w = z+i$$

$$(w-1)z = -w+i$$

与式で $w=1$ とすると矛盾あり。 $w \neq 1$ だとす。

$$z = \frac{-w+i}{w-1}$$

z は虚軸上だとす。

$$z + \bar{z} = 0$$

$$\frac{-w+i}{w-1} + \frac{\overline{-w+i}}{\overline{w-1}} = 0$$

$$\frac{-w+i}{w-1} + \frac{-\bar{w}-i}{\bar{w}-1} = 0$$

$$(w+i)(\bar{w}-1) + (w-1)(-\bar{w}-i) = 0$$

$$-w\bar{w} + w + \bar{w}i - \bar{c} - w\bar{w} - w\bar{c} + \bar{w} + i = 0$$

$$2w\bar{w} - (1-i)w - (1+i)\bar{w} = 0$$

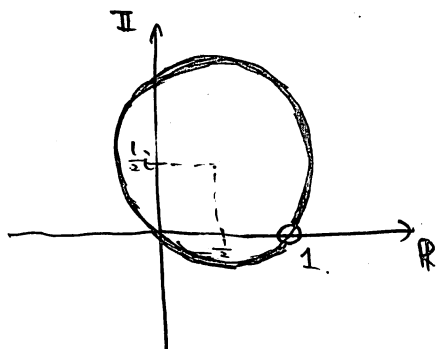
$$|w|^2 - \frac{1-i}{2}w - \frac{1+i}{2}\bar{w} = 0$$

$$\left| w - \frac{1+i}{2} \right|^2 - \left| \frac{1+i}{2} \right|^2 = 0$$

$$\left| w - \frac{1+i}{2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

よって、 w は、中心 $\frac{1+i}{2}$ 、半径 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ の

円である。1 を表す点を a とした円



よって、 a 変形 a の形。

一般に、

$$|w-\alpha|^2 = (w-\alpha)(\bar{w}-\bar{\alpha})$$

$$= |w|^2 - \alpha\bar{w} - \bar{\alpha}w + |\alpha|^2$$

より、

$$|w|^2 - \alpha\bar{w} - \bar{\alpha}w = |w-\alpha|^2 - |\alpha|^2$$

とす。

$$\alpha + \text{場合}: \alpha = \frac{1+i}{2} \text{ とす。}$$

$$\bar{\alpha} = \frac{1-i}{2} \text{ とす。}$$

よって、 a の式 ϵ 。

$$2w\bar{w} - (w+\bar{w}) + (w-\bar{w})i = 0$$

とす。 $w = x+yi$ とす。

$$2(x^2+y^2) - 2x - 2y = 0$$

$$x^2+y^2 - x - y = 0$$

$$\therefore \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

よって xy 平面上では、中心 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 、半径 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ の円を表す。複素数平面上では

中心 $\frac{1+i}{2}$ 、半径 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ の円である。1 を表す点を a とした図形である。

② z と w が $x+yi$ とす。故に整理して a とす。

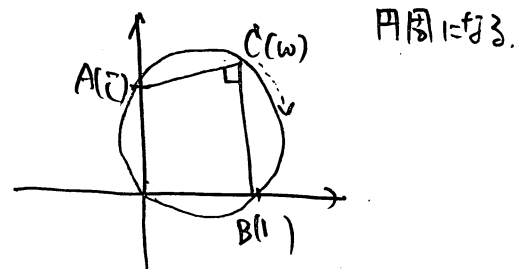
$$z = -\frac{w-i}{w-1} = -\frac{i-w}{1-w} \text{ とす。}$$

$\frac{i-w}{1-w}$ は純虚数 or 0 とす。 z は虚軸上だとす。

$$\arg \frac{w-i}{w-1} = \frac{\pi}{2}$$

つまり、 $A(i)$ 、 $B(1)$ 、 $C(w)$ とす。

$\angle BCA = \frac{\pi}{2}$ とす。 AB は直径とす。



4

(1) 複素数 z について, $\frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i}$ が実数となる点 z 全体のえがく図形 P を複素数平面上に図示せよ.

(2) z が (1) で求めた図形 P 上を動くときに, $w = \frac{z+i}{z-i}$ のえがく図形を複素数平面上に図示せよ.

(北海道大)

(1) $z \neq \pm i$,

$$\frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i} = \frac{2z}{(z+i)(z-i)}$$

$$= \frac{2z}{z^2+1}$$

と分子の z . 分母が実数であるから

$$\frac{2z}{z^2+1} = \frac{2\bar{z}}{\bar{z}^2+1}$$

$$\frac{2z}{z^2+1} = \frac{2\bar{z}}{(\bar{z})^2+1}$$

$$2z \cdot ((\bar{z})^2+1) = 2\bar{z} (z^2+1)$$

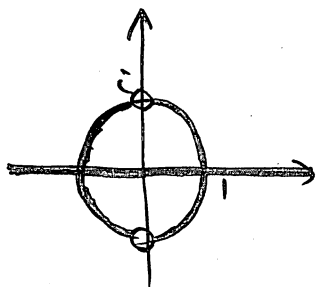
$$|z|^2 \bar{z} + z = |z|^2 z + \bar{z}$$

$$|z|^2 (z - \bar{z}) - (z - \bar{z}) = 0$$

$$(|z|^2 - 1)(z - \bar{z}) = 0$$

$$|z| = 1 \text{ or } z = \bar{z}$$

よって $|z|$ は実数または $|z|=1$ の $z = \pm i$ を除いた点だから. 下図の太線部分が



(2) $w = \frac{z+i}{z-i}$ より *

$$(z-i)w = z+i$$

$$(w-1)z = w(i+i)$$

$w=1$ とすると * が成り立たないから $w \neq 1$.

$$\text{よって } z = \frac{w+1}{w-1} i$$

i) $z = \bar{z}$ のとき

$$\frac{w+1}{w-1} i = \left(\frac{w+1}{w-1} \right) \bar{i}$$

$$\frac{w+1}{w-1} i = \frac{\bar{w}+1}{\bar{w}-1} (-i)$$

$$-(w+1)(\bar{w}-1) = (w-1)(\bar{w}+1)$$

$$-w\bar{w} + w - \bar{w} + 1 = w\bar{w} + w - \bar{w} - 1$$

$$w\bar{w} = 1$$

$$|w| = 1$$

よって. 原点を中心とする半径 1 の円周上 ($w = 1$ を除く)

ii) $|z|=1$ のとき

$$\left| \frac{w+1}{w-1} i \right| = 1$$

$$\left| \frac{w+1}{w-1} \right| \cdot |i| = 1$$

$$|w+1| = |w-1|$$

($t = \arg z$). w は $-1, 1$ を含む 2 点を両端とする垂直二等分線, つまり虚軸上を動く.

また. $z \neq \pm i$ より $w = 0$ を含む.

(たゞ, 下図の太線部分が)

